

Ostvarivanje suštinskih promjena u nastavi matematike na temelju rezultata znanstvenih istraživanja

Mužar-Horvat, Sanela

Doctoral thesis / Disertacija

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Humanities and Social Sciences / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Filozofski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:142:030474>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-23**



FILOZOFSKI FAKULTET
SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

Repository / Repozitorij:

[FFOS-repository - Repository of the Faculty of Humanities and Social Sciences Osijek](#)



dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI



FILOZOFSKI FAKULTET
SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

Sanela Mužar Horvat

**OSTVARIVANJE SUŠTINSKIH PROMJENA U NASTAVI
MATEMATIKE NA TEMELJU REZULTATA ZNANSTVENIH
ISTRAŽIVANJA**

Doktorski rad

Osijek, 2022.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FILOZOFSKI FAKULTET

Sanela Mužar Horvat

**OSTVARIVANJE SUŠTINSKIH PROMJENA U NASTAVI
MATEMATIKE NA TEMELJU REZULTATA ZNANSTVENIH
ISTRAŽIVANJA**

Doktorski rad

Osijek, 2022.

JOSIP JURAJ STROSSMAYER UNIVERSITY
FACULTY OF HUMANITIES AND SOCIAL SCIENCES

Sanela Mužar Horvat

**Achieving substantial changes in teaching math according to the results of
scientific research**

Doctoral thesis

Osijek, 2022.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FILOZOFSKI FAKULTET

Sanela Mužar Horvat

Ostvarivanje suštinskih promjena u nastavi matematike na temelju rezultata znanstvenih istraživanja

Doktorski rad

Društvene znanosti, pedagogija, didaktika

Mentor: prof. dr. sc. Branko Bognar

Osijek, 2022.

JOSIP JURAJ STROSSMAYER UNIVERSITY
FACULTY OF HUMANITIES AND SOCIAL SCIENCES

Sanela Mužar Horvat

**Achieving substantial changes in teaching math according to the results of
scientific research**

Doctoral thesis

Social Sciences, Pedagogy, Didactics

Supervisor: Branko Bognar, Ph.D., Full Professor

Osijek, 2022.

PRIVITAK 2

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem s punom materijalnom i moralnom odgovornošću da sam ovaj rad samostalno napravila te da u njemu nema kopiranih ili prepisanih dijelova teksta tuđih radova, a da nisu označeni kao citati s napisanim izvorom odakle su preneseni. Svojim vlastoručnim potpisom potvrđujem da sam suglasan/na da Filozofski fakultet Osijek trajno pohrani i javno objavi ovaj moj rad u internetskoj bazi doktorskih radova knjižnice Filozofskog fakulteta Osijek, knjižnice Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku i Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu.

Mjesto i datum:

Osijek, 6. srpnja 2022. godine

Potpis doktoranda:

Sanela Mužar Horvat

O MENTORU

Branko Bognar rođen je 1. ožujka 1964. godine u Požegi. Studij razredne nastave završio je 1987. godine na Pedagoškom fakultetu u Osijeku, a Studij pedagogije 1994. godine na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 2003. godine obranio je magistarski rad pod naslovom *Kritičko-emancipacijski pristup stručnom usavršavanju učitelja osnovne škole*. Na istom fakultetu 2008. godine obranio je doktorsku disertaciju na temu *Mogućnosti ostvarivanja uloge učitelja – akcijskog istraživača posredstvom elektroničkog učenja*.

Od svibnja 2005. godine zaposlen je na Filozofskom fakultetu Sveučilišta u Osijeku, na Odsjeku za pedagogiju s prekidom od rujna 2013. pa do rujna 2017. godine kada je bio zaposlen na Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku. Na Filozofskom fakultetu u Osijeku vodi kolegije *Uvod u metodologiju istraživanja*, *Metodologija pedagoških istraživanja*, *Metodika odgoja* i *Metodika rada pedagoga I*. Za potrebe sveučilišne nastave uredio je sustav za elektroničko učenje Moodle (<http://pedagogija.net>).

Uži interes znanstvenog djelovanja prof. dr. sc. Branka Bognara obuhvaća mogućnost ostvarivanja promjena u školskom kontekstu. Posebno nastoji afirmirati akcijska istraživanja u praksi učitelja i stručnih suradnika na svim razinama odgojno-obrazovnog sustava. U svrhu popularizacije akcijskih istraživanja objavio je više radova na tu temu i održao izlaganja na različitim stručnim i znanstvenim skupovima u zemlji i u inozemstvu. Uz to bavi se mogućnošću unapređenja kvalitete stručnog usavršavanja učitelja i stručnih suradnika te poticanjem kreativnosti učenika, studenata i učitelja.

Sudjelovao je kao istraživač na dva projekta koje je financiralo Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa. Od 2010. do 2017. godine surađivao je s Pestalozzi programom Vijeća Europe. U sklopu tog programa osmislio je i vodio akcijsko-istraživački projekt u koji su bili uključeni sudionici iz šest europskih zemalja. Od 1. prosinca 2018. godine voditelj je projekta „Stručno usavršavanje učitelja u funkciji unapređenja rezultata učenja učenika osnovne škole u prirodoslovnom i matematičkom području“ (šifra: IP 2018-01-8363) koji financira HRZZ.

Bio je član organizacijskih odbora na tri međunarodne konferencije te predsjednik organizacijskih odbora na dvije međunarodne znanstvene konferencije. Održao je više pozvanih izlaganja od kojih dio u inozemstvu.

U suradnji sa znanstvenicima iz različitih zemalja osnovao je međunarodni časopis Educational Journal of Living Theories. Za objavljivanje radova ustrojio je mrežnu stranicu (<https://ejolts.net>). Od 2001. godine član je uredništva časopisa Metodčki ogledi.

Obnašao je dužnost voditelj Katedre za pedagogiju i voditelja Odsjeka za pedagogiju na Filozofskom fakultetu u Osijeku. Bio je predsjednik Katedre za pedagogiju i psihologiju na Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku te voditelj poslijediplomskog sveučilišnog studija Pedagogija i kultura suvremene škole na Filozofskom fakultetu Osijek. Član je Upravnog odbora Hrvatskog pedagoškog društva.

SAŽETAK

Suvremeno društvo suočeno je s brojnim promjenama koje uvelike mijenjaju kontekst obrazovanja uključujući i nastavu matematike. Takve promjene postavljaju nove standarde i programe u nastavi matematike te donose nova očekivanja od učenika. Iako su praktičari upoznati s kurikulumom i potrebom uvođenja promjena u nastavu matematike, ipak im nije do kraja jasno na koji bi način to trebali učiniti. Osim toga, Hattie (2015) je ustvrdio da mnoge promjene koje se nastoje uvesti u obrazovanje nisu dovoljno učinkovite da bi im trebalo posvećivati posebnu pozornost. Zbog toga je potrebno ustvrditi koje promjene i na koji način treba unositi u nastavu matematike kako bismo doprinijeli boljim učeničkim rezultatima.

Cilj ovog istraživanja bio je ostvariti suštinske promjene u nastavi matematike kombinacijom dviju vrsta istraživanja – sustavnog pregleda literature i akcijskog istraživanja. Sustavni pregled literature bio je usmjeren na utvrđivanje značajki učinkovite nastave matematike koje doprinosi boljim rezultatima učenja učenika razredne nastave na temelju analize odabranih (kvazi)eksperimentalnih istraživanja. Analizom relevantne literature utvrđene su sljedeće značajke učinkovite nastave matematike: *određivanje matematičkih ciljeva koji vode učenju, uvažavanje učeničkog predznanja, korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, vođenje smislene matematičke rasprave, izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja, korištenje tehnologije, suradničko učenje, povratne informacije*. Kvalitativna analiza programa uvrštenih u sustavni pregled literature pokazala je da se u učinkovitim intervencijama *koriste zadatci koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, daju se kvalitetne povratne informacije, uvažava se učeničko predznanje i koristi se tehnologija*. Osim toga utvrđeno je *kako nije dostatno primjenjivati samo jednu značajku, već je potrebno uključiti i kombinirati različite značajke nastave matematike koje su se pokazale učinkovitima na temelju rezultata istraživanja*. Dakle, u nastavi matematike važno je mijenjati metode poučavanja i učenja. Na taj se način nastava prilagođava različitim mogućnostima i interesima učenika i omogućuje njihov veći angažman.

Akcijsko istraživanje imalo je za cilj *unaprijediti kvalitetu nastave matematike u razrednom odjelu drugog i trećeg razreda osnovne škole koristeći rezultate sustavnog pregleda relevantnih i recentnih istraživanja*. Uvođenje promjena posebno se odrazilo na *učeničko rješavanje problemskih zadataka koji promiču zaključivanje, uporabu tehnologije i korištenje konkretnog materijala* što je pozitivno utjecalo na učeničku aktivnost i zadovoljstvo nastavom matematike.

Promjene su u nastavi neophodne kako bi dovele do boljih učeničkih rezultata iz matematike. Hoće li to biti učinjeno ponajprije ovisi o visokoj motiviranosti, osobnom angažmanu i ustrajnosti učitelja. Ne temelju ovog istraživanja moguće je zaključiti kako je važno da učitelj bude spreman raditi na svom profesionalnom razvoju što bi trebalo doprinijeti informiranosti o značajkama učinkovite nastave te uvođenju promjena uz sustavno praćenje rezultata tog procesa. Osnovni znanstveni doprinos i originalnost ovog istraživanja ogleda se u povezivanju rezultata sustavnog pregleda literature i ostvarivanja promjena u nastavi matematike posredstvom akcijskog istraživanja što se do sada nije koristilo ni u Hrvatskoj ni u svijetu.

Ključne riječi: nastava matematike, značajke kvalitetne nastave matematike, sustavni pregled literature, akcijsko istraživanje

ABSTRACT

Modern society is facing a number of changes that have great influence on the context of education, including the teaching of mathematics. Such changes set new standards and programs in mathematics teaching and bring new expectations from students. Although practitioners are familiar with the curriculum and the need to make changes in mathematics teaching it is still not entirely clear to them how they should do it. In addition, Hattie (2015b) found that many of the changes sought to be introduced in education are not effective enough so that special attention should be paid to them. Therefore, it is necessary to determine which changes and how they should be introduced in the teaching of mathematics in order to contribute to better student's results.

The aim of this research was to achieve essential changes in mathematics teaching by combining two types of research -a systematic literature review and an action research. The systematic review of the literature was aimed at determining the characteristics of effective mathematics teaching that contributes to better learning outcomes of primary school students based on the analysis of selected (quasi)experimental research. The analysis of relevant literature identified the following features of effective mathematics teaching: *determining mathematical goals that lead to learning respecting student's prior knowledge, using tasks that promote reasoning and problem solving, conducting meaningful mathematical discussion, building procedural knowledge of conceptual understanding, using technology, collaborative learning, feedback information*. Qualitative analysis of the programs included in the systematic review shown that effective interventions *use tasks that promote inference and problem solving, provide quality feedback, respect student's prior knowledge, and use technology*. In addition, it was found that it is not enough to apply only one feature, but it is necessary to include and combine different features of mathematics teaching that have proven to be effective based on research results. Thus, in the teaching of mathematics *it is important to change the methods of teaching and learning. In that way, teaching adapts to the different possibilities and interests of students and enables their greater engagement*.

The action research *aimed to improve the quality of mathematics, teaching in the second and third grade of primary school using the results of systematic review of relevant and recent research*. The introduction of changes had a special impact on *student's problem solving, which promote reasoning, the use of concrete material*, which had a positive effect on student's activity and satisfaction with teaching mathematics.

Teaching changes are necessary to lead to better students performance in mathematics. Whether this will be done depends primarily on the high motivation, personal, commitment and perseverance of a teacher. Based on this research, it is possible to conclude how important it is for a teacher to be ready to work on his professional development which should contribute to information about the features of effective teaching and the introduction of changes with systematic monitoring of the result of this process. The basic scientific contribution and originality of this research is reflected on connecting the results of systematic review of the literature and achieving changes in mathematics teaching through the action research, which has so far been used neither in Croatia nor in the world.

Key words: mathematics teaching, features of quality mathematics teaching, systematic literature review, action research

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. OSTVARIVANJE SUŠTINSKIH PROMJENA U ODGOJU I OBRAZOVANJU	7
2.1. Suštinske promjene u odgojnim i obrazovnim sustavima	7
2.1.1. Proces ostvarivanja promjena u odgojno-obrazovnom sustavu	8
2.1.2. Učitelji nositelji promjena	11
2.1.3. Značajke kvalitetnog odgojno-obrazovnog sustava	13
2.2. Suštinske promjene u obrazovnom sustavu Republike Hrvatske	14
2.3. Suštinske promjene u nastavi	16
3. SUVREMENA NASTAVA MATEMATIKE	20
3.1. Značajke učinkovite nastave matematike	23
3.1.1. Određivanje matematičkih ciljeva koji vode učenju	27
3.1.2. Uvažavanje učeničkog predznanja	29
3.1.3. Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema	31
3.1.4. Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja	36
3.1.5. Vođenje smislene matematičke rasprave	40
3.1.6. Korištenje tehnologije	45
3.1.7. Suradničko učenje	47
3.1.8. Povratne informacije	51
3.2. Modeli kvalitetne nastave matematike	56
3.2.1. Nastava matematike prema načelima Montessori pedagogije	57
3.2.2. Singapurski model nastave matematike	68
4. SUSTAVNI PREGLED LITERATURE	78
4.1. Metodologija	78
4.2. Kvalitativna analiza podataka	87
4.3. Kodiranje i analiza	88
4.4. Pregled učinkovitih intervencija s pozitivnim učinkom na rezultate učenika iz matematike	90
4.5. Rezultati i rasprava	113
4.2.1. Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema	116
4.2.2. Korištenje tehnologije	119
4.2.3. Suradničko učenje	122
4.2.4. Povratne informacije	124
4.2.5. Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja	127

4.2.6.	Uvažavanje učeničkog predznanja	129
4.3.	Zaključak	130
5.	AKCIJSKO ISTRAŽIVANJE	134
5.1.	Metodologija.....	134
5.1.1.	Kontekst akcijskog istraživanja.....	135
5.1.2.	Polazne vrijednosti	136
5.1.3.	Problem akcijskog istraživanja.....	138
5.1.4.	Planirane aktivnosti	143
5.1.5.	Prikupljanje i analiza podataka.....	152
5.2.	Utvrđivanje predznanja učenika drugog i trećeg razreda iz matematike.....	156
5.3.	Opis i interpretacija ostvarenih aktivnosti koje doprinose suštinskim promjenama u nastavi matematike	162
5.3.1.	Učenje utemeljeno na učeničkom predznanju.....	162
5.3.2.	Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja.	166
5.3.3.	Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema	168
5.3.4.	Povratne informacije i tehnologija	175
5.3.5.	Suradničko učenje	179
5.4.	Analiza i interpretacija intervjua s učenicima i anketnih upitnika provedenih s učenicima i roditeljima	183
5.5.	Rezultati COPUS analize inicijalnih videozapisa i videozapisa nastave tijekom akcijskog istraživanja.....	190
6.	ZAKLJUČAK	197
	LITERATURA.....	208

POPIS SLIKA

Slika 1. Shema matematičkog modeliranja problema (Cindrić, 2016, str. 54).....	32
Slika 2. Upoznavanje dekadskog sustava	63
Slika 3. Skup Montessori numeričkih štapova koje predstavljaju brojeve od 1 do 10 (Laski i sur., 2013, str. 5)	64
Slika 4. Brojevi od brusnog papira (Izvor: http://www.alisonsmontessori.com/Sandpaper_Numbers_p/m02.htm)	65
Slika 5. Kutija s vretenima (Izvor: http://www.montessori-spirit.com/fr/compter-de-1-a-10/3309-les-fuseaux-script-police-usa.html#.Vwt7OVSLTIU)	65
Slika 6. Mala ploča za množenje (Izvor: http://www.alisonsmontessori.com/Multiplication_Board_p/m16.htm)	66
Slika 7. Matematički okvir singapurskog kurikulumu 1990. (Wong i Lee, 2009, str. 33).....	69
Slika 8. Slikovni prikaz konkretnih predmeta koji se koristi u zbrajanju.....	74
Slika 9. Slikovni model u kojemu se za prikaz zbrajanja koriste pravokutnici (Clark, 2010, str. 2).....	74
Slika 10. Slikovni model u kojemu se za prikaz oduzimanja dijela od cjeline koriste pravokutnici (Clark, 2010, str. 2)	75
Slika 11. Slikovni prikaz modela usporedbe (Jukić Matić, 2018, str. 196).....	75
Slika 12. Slikovni prikaz modela usporedbe u kojemu je poznat broj naranči, a treba odrediti koliko ima jagoda.....	76
Slika 13. Prikaz modela usporedbe uz korištenje pravokutnika u kojemu je poznat broj naranči, a treba odrediti koliko ima jagoda.....	76
Slika 14. Primjer zadatka usporedbe (Clark, 2010, str. 3)	77
Slika 15. Primjer zadatka u mini igri korištenoj u eksperimentalnom istraživanju (Bakker i sur., 2015, str. 60)	91
Slika 16. Primjer problemskog zadatka s metakognitivnim uputama u obliku stubišta prikazanog pomoću računalnog programa (de Kock & Harskamp, 2014, str. 236)	92
Slika 17. Primjer računalnog programa Matematika koji potiče učenike na raspravu tijekom rješavanja problemskih zadataka (Cavendish, 2020, str. 13)	93
Slika 18. Primjer matematičkog zadatka zbrajanja brojeva na nizozemskom jeziku u alatu Snappet: „zbroji sljedeće brojeve: 3+5+7“ (Faber i sur., 2017, str. 41).....	95
Slika 19. Primjer nadzorne ploče napretka razreda alata Snappet (Faber i sur., 2017, str. 42).....	96
Slika 20. Primjer problemskog zadatka s riječima koji učenici rješavaju u paru (Fuchs i sur., 2017b, str. 63)	97
Slika 21. Primjer motivacijske karte s temom galaksija u programu Galaktička matematika (Powell i Fuchs, 2012, str. 9).....	99
Slika 22. Veliki aligator (Powell i Fuchs, 2012, str. 12).....	99
Slika 23. Primjer aktivnosti na kojima se uči brojenje (Powell i Fuchs, 2012, str. 11).....	100
Slika 24. Primjer aktivnosti za utvrđivanje jednakosti (Powell i Fuchs, 2012, str. 11).....	100
Slika 25. Primjer popisa materijala koji se koristi tijekom dana i dnevni vodič lekcija u programu Sučeljavanje s razlomcima (Fuchs i sur., 2015, str. 11).....	101
Slika 26. Primjer zadatka za pojedinačno natjecanje koji učenici samostalno rješavaju (Fuchs i sur., 2015, str. 26)	102
Slika 27. Primjer rukovanja konkretnim materijalom prije prelaska na rukovanje modelima ili kockama koje predstavljaju voće (dodavanje četiri jabuke u košaru).....	104
Slika 28. Konkretno-slikovno-apstraktni pristup.....	105
Slika 29. Primjer zadatka u programu Matematički oporavak (Wright i sur., 2008, str. 160).....	108

Slika 30. Videozapisi u vezi s iskustvima učitelja i učenika u provedbi programa Brojenje brojeva (Edge Hill University, 2016)	111
Slika 31. Elementi sučelja G-matematika (Tsuei, 2010, str. 203)	112
Slika 32. Područna škola Budimci	135
Slika 33. Učionica kombiniranog odjela 2. i 3. razreda	135
Slika 34. Odgovori učenika na tvrdnju: Na nastavi matematike često učimo u skupinama	139
Slika 35. Odgovori učenika na tvrdnju: Na nastavi matematike najčešće rješavamo samostalno zadatke iz udžbenika i radne bilježnice	139
Slika 36. Odgovori roditelja na pitanje: Smatrate li da je vaše dijete motivirano za učenje nastavnih sadržaja iz matematike?.....	140
Slika 37. Odgovori roditelja na pitanje: Napreduje li vaše dijete u učenju matematike?	141
Slika 38. Analiza učiteljičine i učeničke aktivnosti na inicijalnim snimkama nastave 2019. godine u trećem razredu.....	142
Slika 39. Iterativni model razvoja konceptualnog i proceduralnog znanja (Rittle-Johnson i sur., 2001, str. 347)	145
Slika 40. Trgovina matematičkim novcem	160
Slika 41. Učenje u paru učenice Ž. B.	161
Slika 42. 3-2-1 obrazac.....	163
Slika 43. Zapisivanje učeničkih asocijacija na ploči.....	164
Slika 44. Rješavanje problemskih zadataka uz korištenje tablice ili grafikona.....	167
Slika 45. Odjevne kombinacije koje su sastavili učenici	169
Slika 46. Primjer rješenja problemskog zadatka prema pristupu model – dio cjelina singapurskog modela.....	170
Slika 47. Problemski zadatak čiji je sadržaj povezan s bajkom o Crvenkapici	171
Slika 48. Problemski zadatak čiji je sadržaj kreiran u Wordwall aplikaciji	171
Slika 49. Primjer evaluacijskog listića učenika	172
Slika 50. Osmišljavanje matematičke priče na temelju slike	173
Slika 51. Plickers kartica	175
Slika 52. Provjeravanje učeničkih odgovora pomoću aplikacije Plickers	176
Slika 53. Igra „Tko želi biti milijunaš“	176
Slika 54. Evaluacijski listić	177
Slika 55. Proglašavanje pobjednika u Kahoot kvizu.....	178
Slika 56. Učeničko samovrednovanje.....	179
Slika 57. Suradnička igra učenika 2. i 3. razreda	180
Slika 58. Učenje u paru učenica trećeg razreda	180
Slika 59. Igra „Matematički dvoboj“	182
Slika 60. Igra „Tko će prije do 1000“	182
Slika 61. Procjena učenika o učenju matematike.....	188
Slika 62. Procjena roditelja o učenju matematičkih sadržaja	189
Slika 63. Analiza učeničke aktivnosti na inicijalnim snimkama i u akcijskom istraživanju	191
Slika 64. Analiza aktivnosti učitelja na inicijalnim snimkama i u akcijskom istraživanju	194

POPIS TABLICA

Tablica 1. Smjernice za učitelje i učenike pri rješavanju zadataka koji promiču rješavanje problema i zaključivanje u nastavi (NCTM, 2014, str. 24).....	36
Tablica 2. Smjernice NCTM (2014) za ostvarivanje kvalitetne matematičke rasprave.....	44
Tablica 3. Kriteriji za uključivanje i isključivanje studija.....	81
Tablica 4. Popis istraživanja u kojima značajke učinkovite nastave imaju pozitivan učinak na rezultate učenja učenika iz matematike.....	83
Tablica 5. Analiza značajki učinkovite nastave matematike.....	114
Tablica 6. Ciljevi i kriteriji za procjenu uspješnosti istraživanja	143
Tablica 7. Zastupljenost značajki učinkovite nastave matematike u videozapisima snimljenim za vrijeme akcijskog istraživanja	150
Tablica 8. Poveznice na videozapise nastavnih aktivnosti snimljenih u drugom i trećem razredu.....	154

POPIS KRATICA

COPUS – Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (Protokol za promatranje visokoškolske nastave u STEM području)

CPA – Concrete-Pictorial-Abstract approach (konkretno-slikovno-apstraktni pristup učenja matematike)

EPPI – Evidence for Policy and Practice Information (Dokazi za informiranje politike i prakse)

ERIA – Educational Research Institute of America (Američki obrazovni istraživački institut)

IKT – informacijsko-komunikacijska tehnologija

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (Nacionalno vijeće nastavnika matematike)

PIRLS – Progress in International Reading Literacy Study (Međunarodno istraživanje razvoja čitalačke pismenosti u materinskome jeziku)

PISA – Programme for International Student Assessment (Program za međunarodno ispitivanje znanja i vještina učenika)

STAD – Student Teams-Achievement Divisions (Učenički timovi prema postignućima)

TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study (Međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja)

1. UVOD

Matematika je apstraktna znanost o brojevima, količini i prostoru (Taylor, 2014). Dunphy i sur. (2014) smatraju da je matematika kao ljudska djelatnost i društveni fenomen dio ljudske kulture. Dakle, ona je povijesno razvijena i razumljiva samo u kulturalnom kontekstu. Matematika se možda čini apstraktnom, ali je primjenjiva u svakodnevnom životu. Kao nastavni predmet usmjerena je na razvoj logičko-matematičkog mišljenja, ima važnu ulogu u formiranju ličnosti te stvara kompetentnog pojedinca koji primjenjujući matematičko znanje uspješno rješava probleme u svakodnevnom životu. Djeca uče matematiku od rođenja te nastavljaju s učenjem rastući i istražujući svijet u kojem žive kroz odgovarajuća matematička iskustva. Stoga je potrebno koncentrirati se na važnost, ljepotu i korist matematike i u nastavi i u svakodnevnom životu.

Početo učenje matematike započinje praktičnom aktivnošću djece. U prvim godinama života djece važno je razvijati pozitivan stav prema matematici te razvijati zainteresiranost za učenje kako bi mogli uživati u matematičkim aktivnostima (Taylor, 2014). Nadalje, važno je povezivati matematičke aktivnosti s drugim iskustvima te poticati na smisljeno učenje kao i rješavanje matematičkih problema. Djeca traže nove mogućnosti učenja koje će se nadovezati na njihovo prethodno znanje i omogućiti im razvoj novog matematičkog znanja. Uloga odraslih jest koristiti prethodno znanje učenika u stvaranju novih matematičkih izazova. Kako bi se izbjegao negativan stav prema učenju matematike nužno je pronaći prikladne strategije poučavanja i učenja. U ranom učenju matematike djeca trebaju povezivati i generalizirati matematičke pojmove s iskustvima iz svakodnevice te povezivati nova iskustva s postojećim (Gifford, 2005). Piaget smatra da djeca ne uče praktičnom aktivnošću, nego vizualizacijom i razmišljanjem o praktičnoj aktivnosti. Djeca trebaju razmišljati o fizičkom iskustvu kako bi izgradili apstraktne pojmove (Gifford, 2005). Dooley i sur. (2014) tumače da je temelj prvih matematičkih iskustava dječja igra. Dakle, djeca u igri spontano uče matematiku. Igra pruža kontekst u kojem djeca mogu razmišljati o svojim prošlim iskustvima, uspostaviti veze kroz iskustva, predstavljati ta iskustva na različite načine, istraživati mogućnosti i stvarati značenje. Ovi procesi igre imaju jake veze s matematičkim razmišljanjem. Igra je bogat kontekst za promicanje matematičkog jezika i pojmova. Sarama i Clements (2009) identificiraju tri vrste igre u kojima djeca uče matematiku: senzomotorička igra, simbolička ili igra pretvaranja i igre s pravilima.

Svrha učenja matematike u školama ima dvojaku ulogu koja uključuje stvaranje matematički funkcionalnih građana i pripremanje pojedinaca za buduće karijere u kojima matematika ima presudnu ulogu. Prema Valeru (2009) matematičko obrazovanje odnosi se na praktično područje koje se bavi aktivnostima povezanim s poučavanjem i učenjem matematike i studijama čiji je predmet istraživanja nastava matematike. Matematičko obrazovanje djece može se definirati kao razvijanje razumijevanja brojeva i matematičkih pojmova. Suvremeno matematičko obrazovanje neraskidivo je povezano s vizijom koja zagovara uključivanje sve djece u učenje matematike. Matematičko je obrazovanje kulturološki osjetljivo. Odnosno, matematičko je obrazovanje kulturološki fenomen i metode poučavanja povezane su sa sredinom u kojoj djeca žive (Dunphy i sur., 2014).

Conway i Finbarr (2006) ističu tri teorijska pristupa koji različito definiraju učenje matematike: *biheavioristički*, *kognitivistički*, (*socio*)*konstruktivistički*. Dunphy i sur. (2014) tome dodaju i konstrukcionizam koji se razvio iz (*socio*)*konstruktivističke* teorije. Te teorije učenja utjecale su na matematičko obrazovanje u posljednjih sto godina.

Bognar (2016) ističe kako se „*biheavioristička teorija* temelji na pretpostavci da se učenje događa kao rezultat podražaja koji dolaze iz okoline“ (str. 206). U toj teoriji učenje se događa kao rezultat promjena u ponašanju. Bihevizizam u matematičkom obrazovanju utjecao je na metode poučavanja, učenja i ocjenjivanja. Temelji se na tri osnovne pedagoške strategije: rastavljanje sadržaja na manje cjeline, postupno poučavanje osnovnih pojmova te potkrepljivanje i nagrađivanje vidljivog napretka. Iz navedene perspektive znanje se može promatrati kao hijerarhijski sklop, odnosno zbirka asocijacija ili bihevizornih jedinica. Ukratko, bihevizizam implicira učenje u malim koracima, hijerarhijski slijed zadataka od jednostavnih prema složenim i potkrepljivanje vidljivog napretka. *Bihevizornička teorija* usredotočena je na učenje temeljnih matematičkih koncepata i procedura prije rješavanja problemskih zadataka. U toj teoriji poučavanje se fokusira na potporu učeniku u kretanju kroz hijerarhijski organizirane matematičke sadržaje (Conway i Finbarr, 2006).

Kognitivna teorija naglašava prirodu ljudskog učenja i razvoja te ideju u kojoj svaki pojedinac sam konstruira svoje učenje. Teorija ističe važnost aktivnog uključivanja učenika u proces učenja i rješavanje problema kao kontekst unutar kojeg uči (Conway i Finbarr, 2006). „Za razliku od bihevizorničke teorije koja u središte svog istraživačkog interesa postavlja mogućnosti modifikacije ponašanja manipuliranjem vanjskim faktorima, kognitivisti nastoje razumjeti interne (mentalne) procese“ (Bognar i Filipov, 2020, str. 207). Učenje se u kognitivnoj teoriji ostvaruje uvidom, obradom informacija, pamćenjem i percepcijom. Ono što

je zanemareno u ovoj teoriji jest pomoć odraslih i njihovo vođenje procesa učenja te sudjelovanje u komunikaciji s drugim ljudima, a posebno vršnjacima.

(Socio)konstruktivistička teorija učenja matematike naglasak stavlja na socijalnu interakciju u oblikovanju učenja (Dunphy i sur., 2014). Osim socijalnog aspekta, kultura i kulturalni utjecaj presudni su za učenje.

Vigotski kao jedan od predstavnika *(socio)konstruktivističke teorije* posvećuje posebnu pozornost utjecaju koji socijalni i kulturalni kontekst ima na dječje mišljenje. Također naglašava da je učenje društveno posredovano te ističe važnost pojmova poput interakcije, zajedničke pažnje i intersubjektivnosti. On ističe zajedničku aktivnost i suradnju kao bitne kontekste unutar kojih se događa učenje (Dunphy i sur., 2014). Osim toga, ističe povezanost jezika i spoznaje, socijalnu dimenziju jezika, važnost komunikacije i sudjelovanja u učenju. U *(socio)konstruktivističkoj teoriji* djeca uče matematiku kroz društvene i diskurzivne aktivnosti (Dunphy i sur., 2014). Vigotski (2012) ističe snažan utjecaj bogatog i poticajnog okruženja na dječje matematičke aktivnosti. On smatra da se temeljne sposobnosti pažnje, pamćenja razvijaju u poticajnoj okolini.

Bruner (1966) kao predstavnik te teorije naglašava socijalni i kulturalni kontekst u učenju. Bruner naglasak stavlja na učenje kao transformaciju sudjelovanja u kojem se učenik mijenja na razini svoje uključenosti te djeluje na aktivan i konstruktivan način. Učenje se doživljava kao proces kojim se djeca mijenjaju kao rezultat sudjelovanja u aktivnosti. Prema Bruneru kultura oblikuje umove pojedinaca kao alat s kojim grade ne samo svoje svjetove, već i njihovo konceptualno razumijevanje. Interakciju između učenika i iskusnijih pojedinaca vidi kao presudnu za učenje te time ističe teoriju skela. U učenju matematike učenici početne ideje postupno transformiraju u potpuno razvijene matematičke pojmove pod utjecajem interakcije s odraslima. Bruner smatra da ono što definira dječji razvoj jest međusobno djelovanje različitih simboličkih oblika. Također ističe da vođenim otkrivanjem djeca imaju priliku istražiti matematičke pojmove i postupke, ali pod nadzorom učitelja koji organizacijom nastave potiče učenike na učenje. Osim toga, smatra da se poučavanje matematike treba ostvariti pažljivim odabirom zadataka koji odgovaraju potrebama i dobi učenika (Newton i Alexander, 2015).

Piagetova teorija konstruktivizma ističe aktivnu izgradnju znanja kroz procese asimilacije i prilagodbe u interakciji s okolinom. Pojedinci grade svoj svijet kroz iskustvo, tj. oni sami konstruiraju svoju spoznaju. Konstruktivizam usmjerava svoju pažnju na sposobnosti djece da konstruiraju svoje znanje u različitim kognitivnim fazama razvoja. Konstruktivistički pristup učenju matematike jest prema Battisti (2004) određen elementima i organizacijom relevantnih

mentalnih struktura koje učenici trenutno koriste za obradu svojih matematičkih svjetova. Za konstruiranje novog znanja i osmišljavanje novih situacija učenici nadograđuju i revidiraju svoje sadašnje mentalne strukture kroz procese djelovanja, refleksije i apstrakcije. Prema konstruktivističkoj teoriji Piaget smatra da djeca konstruiraju svoje znanje i razumiju ga kroz interakciju sa svojim okolinom (Taylor, 2014). Ističe da je najvažnije za usvajanje matematičkih sadržaja učenje s razumijevanjem, a ne učenje napamet (Newton i Alexander, 2015). Bognar (2016, str. 250) ističe da konstruktivistička nastava treba osigurati „veću samostalnost i aktivnost učenika, poticati njihovo kritičko mišljenje, postavljanje pitanja“, sudjelovanje u raspravama i rješavati probleme iz svakodnevnog života. Učenje se ne može svesti na vođenje aktivnosti učenika uz pomoć prethodno pripremljenih materijala poput udžbenika, knjiga, multimedijских sadržaja ili predavanja nastavnika; nego implicira nastavak društvene interakcije između onih koji uče i onih koji im pomažu u učenju. On smatra da učenje nije samo prijenos znanja, već se ono događa u društvenim interakcijama među učenicima i kroz sudjelovanje u praktičnim aktivnostima.

Konstrukcionistička teorija učenja temelji se na ulozi kulturnih alata nadograđujući se na *Piagetov* konstruktivizam i *(socio)konstruktivističku teoriju*. Papert i Harel (1991) tumače da se u konstrukcionizmu pozornost posvećuje načinu i umijeću učenja, točnije tumače ga kao „izgradnju strukture znanja“ bez obzira na okolnosti učenja. Nadalje, izgradnja znanja događa se i posebno je uspješna u kontekstu u kojem je učenik svjesno angažiran u izgradnji javnog entiteta. U ovoj teoriji znanje se izgrađuje i temelji na izvođenju konkretne radnje koja rezultira gotovim proizvodom. Osim toga, smatra se da kulturni alati, bilo fizički ili simbolički, utječu na načine na koje ljudi komuniciraju i razmišljaju o svijetu. Digitalne su tehnologije kulturni alati suvremenog digitaliziranog društva. Učenici se doživljavaju kao aktivni graditelji vlastita znanja i uče s posebnom učinkovitošću kad se bave konstruiranjem njima značajnih artefakata. U današnjem digitaliziranom društvu artefakti iz matematičkog gledišta mogu uključivati računalne programe, baze podataka itd. Korištenje digitalne tehnologije omogućuje učenicima stvaranje vlastita znanja, a ne predodžbe koje je stvorio netko drugi te mogu imati i moćan pristup matematičkim idejama koje su se do tada smatrale nemogućima (Dunphy i sur., 2014).

S promjenama koje se događaju u suvremenom društvu u kojem živimo pojavljuju se i sve veći zahtjevi i očekivanja u sustavu obrazovanja kao i u nastavi matematike. Suvremena nastava matematike donosi nove standarde i mijenja programe te ima nova očekivanja od učenika. Također donosi i zaključke o tome što je relevantno po pitanju novih matematičkih kurikuluma

i promjena u nastavi. Međutim, još uvijek nije do kraja jasno koje promjene i na koji način bi ih praktičari trebali uvesti u svoju nastavu kako bi doprinijeli kvaliteti učeničkog učenja.

Cilj je ovog istraživanja ostvariti suštinske promjene u nastavi matematike na temelju značajki kvalitetne nastave matematike utvrđenih sustavnim pregledom relevantnih i recentnih istraživanja. Dakle, rezultate relevantnih istraživanja povezali smo s akcijskim istraživanjem kojemu je cilj unaprijediti kvalitetu nastave matematike i postignuća učenika u razrednom odjelu drugog i trećeg razreda osnovne škole. Takav pristup trebao bi osigurati da promjene koje se uvode ne budu površne, već suštinske. Hattie (2015b) je ukazivao na problem bavljenja promjenama koje imaju mali učinak te ih je nazvao politikom ometanja. Zbog toga je napravio rang listu učinaka i istaknuo važnost posvećivanja pozornosti onim promjenama s efektom učinka 0,4 i većim. On je to nazvao vidljivo učenje što nije u duhu hrvatskog jezika. Umjesto toga koristimo pojam suštinske promjene, a do suštinskih promjena u ovom istraživanju nastojali smo doći na temelju sustavnog pregleda literature.

Provedbom sinteze rezultata najučinkovitijih istraživanja o učincima matematičkih programa na postignuća učenika iz matematike Pellegrini i sur. (2021) ustvrdili su da su programi koji povećavaju postignuća učenika oni koji naglašavaju individualno poučavanje učenika i poučavanje jednog učitelja s malom grupom učenika. Individualnim poučavanjem (jedan učitelj s jednim učenikom) omogućuje se učitelju da u potpunosti posveti nastavu potrebama učenika. Također, jedan učitelj s malom grupom uspostavlja bliske odnose s učenicima koje poučava, pružajući im pozornost i pohvale za kojima mnogi učenici žude. U malim grupama učenici također mogu izgraditi dobre odnose s ostalim učenicima što može omogućiti međusobnu pomoć kao i povećanje motivacije. Također programi koji povećavaju postignuća učenika jesu programi koji omogućavaju profesionalno usavršavanje učitelja za unošenje inovativnih metoda u nastavu i vođenje razreda.

Prema rezultatima međunarodnog istraživanja TIMSS 2019 utvrđeno je da naši učenici nakon završene razredne nastave iz matematike postižu rezultate koji su nešto veći od prosjeka (Elezović i sur., 2021). Premda postoji trend rasta tih rezultata, naši učenici nisu uspješni u rješavanju zadataka više razine za razliku od učenika u Singapuru i drugim zemljama koje zauzimaju vodeća mjesta. Kako bi se poboljšali rezultati naših učenika iz matematike učitelji bi trebali organizirati nastavu tako da svi učenici mogu napredovati i postići uspjeh, ali i omogućiti im da što više rješavaju problemske zadatke koji zahtijevaju zaključivanje i primjenu naučenog znanja.

Provedena su brojna akcijska istraživanja s ciljem unapređenja nastave matematike, ali ne i studije koje objedinjavaju sustavni pregled literature i akcijsko istraživanje. Ovo istraživanje trebalo bi rezultirati znanstvenim spoznajama o procesu ostvarivanja promjena u nastavi matematike kombinacijom dviju vrsta istraživanja: sustavnim pregledom literature i akcijskim istraživanjem.

2. OSTVARIVANJE SUŠTINSKIH PROMJENA U ODGOJU I OBRAZOVANJU

2.1. Suštinske promjene u odgojnim i obrazovnim sustavima

Karajić i sur. (2019, str. 8) ističu da su „odgojno obrazovni sustavi [su] poprišta i ‘otvorena bojišta’ različitih ideja, vrijednosti, poredaka, reformi, zakonodavnih akata, pedagoških pojmova i metoda“. Stvarne promjene tražene ili ne predstavljaju ozbiljno osobno i kolektivno iskustvo koje karakteriziraju ambivalentnost i nesigurnost, a ako promjena uspije, može rezultirati osjećajem majstorstva, postignuća i profesionalnog rasta (Fullan, 2007, str. 23). Suvremeno društvo u gotovo svim segmentima današnjice ostvaruje duboke promjene. Uzevši u obzir da se današnje društvo temelji na znanju i kreativnosti kao pokretaču promjena i ključu konkurentnosti, obrazovanje se treba mijenjati i još više razvijati kako bi učenicima omogućilo razvoj novih kompetencija potrebnih za život u suvremenom svijetu. Mourshed i sur. (2010) smatraju da postoji vrlo malo stvari koje su za buduću dobrobit našeg svijeta toliko važne kao kvaliteta obrazovanja koju učenici dobivaju. Prema Schleicher (2016) danas je kod učenika potrebno razviti pouzdan kompas i navigacijske vještine snalaženja u sve neizvjesnijem i nestabilnijem svijetu. Učitelji su od prijašnjih generacija očekivali da će ono čemu su ih poučavali osposobiti vještinama potrebnim za cijeli život. Međutim, danas učitelji trebaju pripremiti učenike za brže ekonomske i socijalne promjene nego ikad prije, za poslove koji još nisu stvoreni, za korištenje još nepostojećih tehnologija i za rješavanje društvenih problema koji će se tek pojaviti (Schleicher, 2016). U skladu s tim javlja se i potreba ostvarivanja suštinskih promjena u odgoju i obrazovanju. Fullan (2011) smatra da su pokretači promjena strategije koje potiču unutarnju motivaciju učitelja i učenika, angažiraju ih u kontinuiranom poboljšanju nastave i učenja, potiču kolektivni ili timski rad. Poteškoće koje se javljaju pri uvođenju promjena odnose se na razvijanje novih vještina, ponašanja i prakse te na kraju vjerovanja u promjene. Većina školskih sustava u Europi prošla je različite reforme. Te su reforme bile nužne kako bi se udovoljilo različitim kulturnim, profesionalnim i obrazovnim zahtjevima. Bognar (2016, str. 324) smatra da „šira profesionalna i društvena javnost podržava potrebu promjene obrazovnog sustava koji bi trebao posvetiti pozornost razvoju poduzetnosti, kreativnosti, kompetencija cjeloživotnog učenja i digitalnih kompetencija“. Međutim, smatra da i dalje nije u potpunosti jasno praktičarima kako bi se te promjene trebale ostvariti, te koliko su učitelji spremni te promjene provesti.

Mourshed i sur. (2010) smatraju da se školski sustav može poboljšati s bilo koje početne točke. Za početak je potrebno identificirati kritičnu točku na kojoj se sustav trenutno nalazi, zatim odrediti skup intervencija potrebnih za postizanje boljih rezultata učenja i na kraju prilagoditi intervenciju novom sustavu uzimajući u obzir povijest, kulturu, strukturu i kulturu školskog sustava i nacije. Bognar i Lukaš (2016, str. 48) smatraju da se „bitne promjene ne mogu postići preko noći, stoga je potrebno osigurati vrijeme stabilnog društvenog razvitka koje bi omogućilo povoljno okruženje za njihovo ostvarivanje“.

2.1.1. Proces ostvarivanja promjena u odgojno-obrazovnom sustavu

Wedell (2009) smatra da je jedan od razloga pokretanja promjena povezan s tehnološkim i ekonomskim učincima globalizacije. To se odražava i na odgojni i obrazovni sustav koji je sastavni dio širih društvenih promjena. Promjene se događaju u tri faze: inicijacija, implementacija i institucionalizacija (Fullan, 2007, Milles i sur. 1987). Cilj je svake promjene institucionalizacija, ali institucionalizacija se ne događa ako promjena nije uspješno pokrenuta i ako se ne provodi. Svaka faza, premda je povezana i ovisi o uspjehu prethodne, zahtijeva različite strategije.

Iniciranje je prva faza procesa promjena. Početak promjene započinje analizom koja doprinosi utvrđivanju problema i utvrđivanju problema i mogućnosti unapređenja prakse. Prema Stoll i Fink (2000) inicijacija uključuje proces koji vodi do odluke da se provede promjena. Inicijacija ovisi o „relevantnosti inovacija za poboljšanje temeljem potreba, kvalitete, praktičnosti, jasnoće i složenosti, spremnosti djelatnika da se angažiraju, raspoloživosti resursa i potpore, uključujući i vrijeme“ (Stoll i Fink, 2000, str. 71). Wedell (2009) ističe da su u inicijalnoj fazi prisutna razmišljanja i raspravljanja. To je faza u kojoj se ideja prvi puta postavlja te u kojoj se raspravlja je li ostvariva i politički poželjna. Kada se donese odluka da se promjena pokrene slijedi sljedeća faza implementacije.

U fazi implementacije uvode se promjene koje se mogu vidjeti u učionicama. Tek kada se inovacija u potpunosti provede, može se održati. Voditelji nadgledaju proces provedbe, procjenjuju točnost i učestalost inovacije te pružaju potrebnu podršku za usavršavanje provedbe. Implementacija se također sastoji od prvih iskustava provođenja reformi u djelo. Na uspješnu implementaciju utječu mnogi čimbenici kao što su karakteristike same promjene, školski kontekst te vanjski čimbenici (Stoll i Fink, 2000).

Mnoge inovacije u obrazovanju propadaju jer oni koji ih provode previše naglasaka stavljaju na inicijalnu fazu, a nedovoljan naglasak stavlja se na provedbu i institucionalizaciju. Institucionalizacija znači da su nove mogućnosti postale rutinske u profesionalnom kontekstu i da vode do predviđenih rezultata. Institucionalizacija se događa kada inovacija postane rutinska praksa u svojoj učestalosti, dosljednosti, točnosti i rezultatima (Fullan, 2007). Dakle, institucionalizacija podrazumijeva ugradbu inovacije u postojeću praksu. Prema Wedellu (2009) institucionalizacijom promjena se uglavnom više ne vidi kao nova ili drugačija već postaje manje-više prihvaćena.

Prošlost oblikuje naše težnje i usmjerenje prema promjeni, međutim najbolje je imati promišljeni i reflektivni odnos prema prošlim iskustvima uključujući i odgojno-obrazovna iskustva. Tim načinom može se prihvatiti postojanje prošlih iskustava, prepoznati njihov utjecaj te donijeti odluku o tome koji se aspekti mogu ponovno pokrenuti, a koje ćemo ostaviti iza sebe. Hargreaves i Shirley (2009) govore o četiri povijesna pristupa promjenama: 1) inovativnost i nekonzistentnost, 2) tržišna orijentacija i standardizacija, 3) izvedba i partnerstvo i 4) put nadahnuća i inovacija, odgovornosti i održivosti.

Za prvi pristup tvrde da je bio razdoblje ogromnog povjerenja u sposobnost rješavanja socijalnih problema potaknut rastućom ekonomijom i porastom populacije. Društveni pokreti počeli su s borbom za građanska prava žena i prava marginaliziranih skupina u stvaranju vlastite slobode te za postizanje asertivnosti u javnoj sferi. Naglašeni buntovni i kreativni duh ulazi u javne škole, iako neravnomjerno, u obliku eksperimentiranja, inovacija, besplatnog školovanja, nastave usmjerene na dijete. Učitelji su smatrali da im je oduzeta sloboda stvaranja kurikuluma. Tadašnji propisani kurikulumi učiteljima su ukrali tu misiju i učitelji su tugovali za strašću i kreativnošću u nastavi. Međutim, učitelji su svoju praksu temeljili uglavnom na intuiciji i ideologiji, a ne na dokazima. Roditelji nisu imali pravi pristup podacima o postignućima učenika osim izvještajnih kartica na kraju obrazovnih razdoblja. Pojavljuje se nepovjerenje javnosti, ne samo prema obrazovnom sustavu već i prema državi. Za učitelja u učionici kombinacija centraliziranih okvira i inicijativa s decentraliziranom odgovornošću djelovala je zbunjujuće i kontradiktorno. Bez učinkovita vođenja učitelji su se u školama žalili na to da su ishodi previše neodređeni.

Hargreaves i Shirley (2009) za drugi pristup promjenama tvrde da je bio zasnovan na rastućoj centralizaciji i standardizaciji obrazovanja. Standardi učinka i ciljevi postignuća nametnuti su političkom kontrolom. U tom pristupu promjene su nametnute odozgo i podrazumijevale su uvođenje novih standarda u obliku povećane konkurencije među školama, strogo i usko

definiranih kurikulumu. Kako bi se učitelje prisililo da slijede izvana zacrtane ciljeve uvode se sankcije i premještanja učitelja, smjenjivanja ravnatelja i zatvaranja škola ako uspjeh nije bio postignut. U tom pristupu učitelji nisu osjećali vlasništvo nad očekivanim promjenama (Fullan, 2004). Dakle, prvi način obrazovnih promjena ponudio je inovacije, ali ne i dosljednost ili koheziju. Drugi način promjena nametnuo je veću konkurenciju i povećao očekivanja, ali uz preveliku cijenu za učenje učenika, motivaciju učitelja i sposobnost vodstva u školama da se nose s izvana nametnutim promjenama.

Treći put promjena usmjerio se na osiguravanje pretpostavki za kreativnu sinergiju javnih, privatnih i volontarističkih inicijativa u ostvarivanju društveno poželjnih ciljeva. To je podrazumijevalo veću profesionalnu podršku učiteljima i školama u započinjanju i ostvarivanju promjena koje su često kretale odozdo. To je rezultiralo većim ulaganjem u stručno usavršavanje učitelja i stvaranjem profesionalnih mreža koje su trebale osigurati veću motivaciju i uključenost odgojno-obrazovnih djelatnika u proces promjena. U ovom je pristupu velik naglasak postavljen na utvrđivanje učinkovitosti ostvarenih promjena povećanim testiranjem (Hargreaves i Shirley, 2009)

Četvrti je način promjena put nadahnuća i inovacija, odgovornosti i održivosti. Ova posljednja promjena prema Hargreaves i Shirley (2009) oslobađa učitelja iz okova kontrole vanjskih čimbenika. U četvrtom putu promjena ističe se važnost vizije za čije stvaranje ne bi trebala biti odgovorna samo vlast već isto tako škole i društvena zajednica. U ovom pristupu roditelji su više uključeni u odgojnu i obrazovnu praksu, a javnost konačno dobiva obrazovne usluge koje traži. Promjene se temelje na demokraciji i profesionalnosti, a ne na birokraciji i tržištu. Četvrti pristup promjenama za razliku od prijašnjih znači temeljni pomak u profesionalizaciji učitelja, dajući veću autonomiju odgojno-obrazovnoj politici te uvodeći veću transparentnost i angažman roditelja. Četvrti put predstavlja značajnu promjenu za sve, vladajuće, roditelje i učitelje. Taj pristup promjenama podrazumijeva primjereniji način izgradnje prosperitetnih i konkurentnih društava znanja, uklanja nepravdu, podupire profesionalnost i integritet te uspostavljanje veće kohezije i uključivosti od prethodnih pristupa. Pri tome, odgoj i obrazovanje ne svode se samo na aktivnosti u školama, već se ono nastoji proširiti na različite segmente društva kako bi se poboljšala ukupna kvaliteta života.

2.1.2. Učitelji nositelji promjena

Fullan i Stiegelbauer (1991) smatraju da su učitelji nositelji promjena, a kako bi do promjena došlo učitelji trebaju unaprijediti svoje kompetencije. Odnosno, Fullan (2011) ističe da ključna pretpostavka mijenjanja obrazovnog sustava leži u intrinzičnoj motivaciji i unapređenju kompetencija učitelja. Ključna kompetencija učitelja jest učiti kako se prilagoditi i napredovati u neizvjesnim i turbulentnim vremenima. To podrazumijeva stalno nastojanje da se unaprijedi potencijal učitelja za inovacije. Stoll i Fink ističu (2000) važnost učenja učitelja: „Premda krajnji rezultat obrazovnog procesa moraju biti učenički napredak, razvoj i uspješnost, najvažniji doprinos učenju učenika je učenje učitelja.“ (Stoll i Fink, 2000, str. 203). Dakle, obrazovani sustavi trebaju osigurati poboljšanja obrazovnih postignuća učenika, a tu zadaću mogu ostvariti učitelji kroz promjene u nastavi. To se može događati samo u školama čiji voditelji imaju velika očekivanja, neumoljiv fokus na kvalitetu učenja i poučavanje te stvaranje struktura koje osiguravaju da njihovi učenici dosljedno poduzimaju izazovne zadatke učenja. Bognar (2011) također smatra da učitelji trebaju postati nositelji promjena, a to mogu postati ako preuzmu novu ulogu kritičkih prijatelja, postanu reflektivni praktičari te provode akcijska istraživanja. Hattie je izradio listu učinkovitih čimbenika na rezultate učenja učenika. Ažurirana lista sadrži 252 čimbenika (<https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement/>). Utvrdio je da je prosječna veličina učinka svih intervencija koje je proučavao bila 0,40. Postoji mnogo faktora koji doprinose razlikama u učinkovitosti škola, ali jedan je od važnijih učinkovitost učitelja (Hattie, 2015a). Dakle, ono što stvarno poboljšava učenje učenika jest učiteljevo znanje i mogućnost osiguravanja unapređenja nastavnog procesa. Osim toga, kolektivna učiteljska učinkovitost (Eells, 2011) i učiteljska evaluacija svog utjecaja (Hattie, 2015a) dva su najvažnija faktora koji doprinose obrazovnim rezultatima učenika.

Eells (2011) je u svom doktorskom istraživanju utvrdila visoku učinkovitost kolektivne učiteljske učinkovitosti. To se pokazalo najučinkovitijim pojedinačnim čimbenikom koji doprinosi rezultatima učenja učenika (Donohoo i sur., 2018). Prema Donohoo (2017) za kolektivnu učinkovitost važno je da učitelji vjeruju kako kao kolektiv mogu utjecati na učenje i učenički pozitivan stav prema učenju. Preduvjeti za unapređenje kolektivne nastavničke učinkovitosti uključuju: mogućnost odlučivanja, konsenzus oko ciljeva, učiteljevo upoznavanje s praksom svojih kolega, kohezija kolektiva, adekvatno vođenje i učinkoviti sustavi intervencije (Donohoo, 2017).

Kada učitelji dijele osjećaj kolektivne učinkovitosti školska kultura ima velika očekivanja od učeničkog uspjeha. Učiteljski timovi trebaju utvrditi jesu li promjene u razrednoj praksi

pozitivno utjecale na obrazovne rezultate na temelju analize konkretnih dokaza o učeničkom učenju. Donohoo i sur. (2018) također smatraju da kolektivna učiteljska učinkovitost utječe na postignuća učenika neizravno kroz produktivne obrasce nastavnog ponašanja. Bandura (1993) smatra da je kolektivna učinkovitost socijalni resurs koji se svojom upotrebom ne troši već se obnavlja. Snaga kolektivne učinkovitosti ogleda se u snazi suradnje i vjerovanju da učitelji, nastavnici i učenici mogu zajedno ostvariti velike stvari

Hattie (2009) smatra da su ishodi učenja uspješniji ako učenik sve više postaje učitelj, a učitelj postaje učenik. Nadalje, Hattie (2009) je utvrdio i šest značajki izvrsnosti učitelja:

1. Izvrsni učitelji najviše utječu na učenje učenika
2. Izvrsni učitelji usmjeravaju, utječu, brižni su, aktivni i strastveni tijekom uključivanja u proces poučavanja i učenja
3. Izvrsni učitelji pružaju smislene i prikladne povratne informacije učenicima kako bi se oni mogli uspješno kretati kroz kurikulum
4. Izvrsni učitelji moraju znati ciljeve i kriterije uspjeha učenja
5. Izvrsni učitelji znaju prijeći s jedne ideje na drugu te ih proširiti kako bi učenici konstruirali i rekonstruirali svoje znanje
6. Izvrsni učitelji znaju stvoriti obrazovno okruženje u kojemu se pogreška prihvaća kao prilika za učenje, u kojoj se učenici mogu osjećati sigurno u učenju i istraživanju.

Hopkins (2011) ističe da učinkoviti odgojno-obrazovni sustavi postavljaju u središte svog interesa postignuća i učenje učenika što se postiže prije svega brigom oko kvalitete nastave. Jedan od načina unapređenja nastave jest selekcijska politika koja osigurava da samo najbolji kandidati postanu studenti učiteljskih studija, a zatim učitelji i pedagoški voditelji. Slično tome, Sahlberg (2011) smatra da obrazovanje učitelja treba biti dovoljno konkurentno kako bi privuklo kvalitetne kandidate. Obrazovanje učitelja važan je i priznati dio visokog obrazovanja u Finskoj. U mnogim drugim zemljama situacija je drugačija jer se pripremanje učitelja često svodi na ubrzane tečajevе koji se često ostvaruju izvan sveučilišnih institucija. U Finskoj ne postoje alternativni načini stjecanja učiteljske diplome, samo fakultetska diploma predstavlja dozvolu za obavljanje učiteljskog posla. Ključan preduvjet za privlačenje najsposobnijih mladih ljudi za obrazovanje učitelja jest njihov status i ugled u društvu. Odnosno, učitelji bi trebali biti neovisna i poštovana profesija, a ne samo realizatori izvana propisanih standarda što je prema procjeni većine učitelja postignuto u Finskoj, ali ne i u Hrvatskoj. Naime, 58,2 % učitelja u Finskoj smatra da je njihovo zanimanje u društvu cijenjeno dok to u Hrvatskoj smatra samo 9,2

% učitelja. U Singapuru čak 72 % učitelja u potpunosti se slaže s tvrdnjom da je učiteljska profesija cijenjena u društvu (OECD, 2020).

2.1.3. Značajke kvalitetnog odgojno-obrazovnog sustava

Možemo pretpostaviti da je svaki kvalitetan odgojno-obrazovni sustav proizašao iz napora ključnih čimbenika da doprinesu promjenama umjesto da prihvate postojeće stanje. Barber i Mourshed (2007) na temelju analize naprednih odgojno-obrazovnih sustava istaknuli su tri ključne značajke koje su ih dovele na vrh:

- 1) omogućivanje da kvalitetni kandidati postanu učitelji
- 2) osposobljavanje učitelja za ostvarivanje kvalitetne nastave
- 3) osiguravanje da sustav pruža visokokvalitetan odgoj i obrazovanje svakom djetetu.

Hattie (2015b) smatra da treba izbjegavati reformska nastojanja koja se temelje na neučinkovitim intervencijama. Na primjer, u nekim reformama nastojalo se unaprijediti poučavanje i učenje smanjenjem broja učenika u razrednim odjelima. Međutim, dostupni dokazi sugeriraju da smanjenje broja učenika u razredima nema puno utjecaja na ishode učenika, dapače povećavaju potrošnju školskih resursa. Odnosno, smanjenjem veličine razreda povećava se potreba za većim brojem učitelja. Umjesto takvih pokušaja potrebno je usmjeriti se na učinkovite faktore. To su prije svega učitelji jer kvaliteta školskog sustava počiva na kvaliteti njegovih učitelja (Barber i Mourshed, 2007). Kako bi se to ostvarilo, dobro je usmjeriti se na izbor najboljih kandidata za upis na učiteljske studije te unapređenje pedagoških i metodičkih kompetencija učitelja u praksi.

Ono što osobito motivira kandidate za upis na učiteljske studije jest društveni status koji im stvara ta profesija. Pri izboru najboljih kandidata treba voditi računa o njihovoj visokoj ukupnoj razini pismenosti iz odgovarajućih područja, jakim međuljudskim i komunikacijskim kompetencijama, spremnosti na učenje i motivaciji za poučavanje. Finska ograničava broj mjesta za upis na učiteljske fakultete tako da se mogu zaposliti kada završe studij. Sahlberg (2012, str. 121–122) ističe kako je takav pristup stvorio „snažan moralni i stručni temelj poučavanja u osnovnim školama, u kojima djeca provode prvih šest godina školovanja uz sposobne i učinkovite prosvjetne djelatnike“.

Fullan (2009) smatra da je ostvarivanje suštinskih promjena na razini obrazovnog sustava moguće ostvariti usmjeravanjem na manji broj ključnih faktora. Mourshed i sur. (2010) smatraju da se školski sustav može poboljšati s bilo koje početne točke. Kako bi se to dogodilo

potrebno je voditi računa o tri aspekta koja vode do unapređenja. Prvi aspekt identificira točku na kojoj se sustav trenutno nalazi prema obrazovnim rezultatima učenika. Drugi aspekt ogleda se u skupu intervencija potrebnih za izradu željenih poboljšanja učeničkih postignuća. Treći aspekt odnosi se na prilagodbu promjena uzimajući u obzir povijest, kulturu i strukturu školskog sustava.

Bognar (2016) ističe kako je promjene dobro utemeljiti na iskustvima drugih zemalja. Međutim, on smatra važnim voditi računa o specifičnostima našeg odgojnog i obrazovnog sustava. Stoll i Fink (2000) ističu kako istraživanja poboljšanja kvalitete škola pokazuju da je ono što se zbiva u razredu uglavnom odgovorno za varijacije u utjecaju škola na učeničke rezultate i to puno više nego što su to aktivnosti na razini škole. Dakle, fokusiranje na poučavanje i učenje na razini razrednih odjela nužno je za poboljšanje kvalitete odgojnog i obrazovnog sustava u cjelini.

2.2. Suštinske promjene u obrazovnom sustavu Republike Hrvatske

Promjene mogu biti dugotrajni procesi i trajati više godina, one također traže i različita rješenja koja zahtijevaju razumijevanje i strpljivost svih onih koji su uključeni u procese promjena odgoja i obrazovanja (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta, 2014).

Važan su pokazatelj uspješnosti naših učenika rezultati međunarodnih istraživanja kao što su PIRLS¹, TIMSS² i PISA³. Hrvatska je na međunarodnom istraživanju čitalačke pismenosti PIRLS 2011. godine zauzela visoko 8. mjesto: „Rezultati koje su ostvarili učenici iz Hrvatske usporedivi su s rezultatima učenika iz Sjeverne Irske, SAD-a, Danske, Kineskog Tajpeha, Irske, Engleske i Kanade i statistički nisu različiti“ (Buljan Culej, 2012a, str. 47). Prema rezultatima međunarodnog istraživanja TIMSS 2019 (Elezović i sur., 2021) utvrđeno je da naši učenici nakon završene razredne nastave iz matematike i prirodoslovlja postižu rezultate koji su nešto veći od prosjeka. Utvrđen je i trend rasta rezultata naših učenika iz matematike. Međutim samo 7 % naših učenika doseže višu razinu, za razliku od učenika u Singapuru od kojih je 54 % u

¹ Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS) – međunarodno istraživanje razvoja čitalačke pismenosti u materinskome jeziku.

² Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS – međunarodno istraživanje trendova u znanju matematike i prirodoslovlja (*Trends in International Mathematics and Science Study*) provodi se u sklopu organizacije IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* – Međunarodno udruženje za vrednovanje obrazovnih postignuća).

³ Programme for International Student Assessment, (PISA) odnosno Program za međunarodno ispitivanje znanja i vještina učenika

stanju rješavati matematičke zadatke na višoj razini. Međutim, prosječan rezultat učenika predmetne nastave Republike Hrvatske

...u čitalačkoj i matematičkoj pismenosti statistički se nije značajno mijenjao od 2006. godine kada je PISA prvi put provedena u Republici Hrvatskoj, dok je njihov prosječan rezultat u prirodoslovnoj pismenosti statistički značajno padao, štoviše smanjivao se za pet bodova po trogodišnjemu razdoblju. (Markočić Dekanić i Gregurović, 2020, str. 2)

Prema rezultatima iz matematičke pismenosti u istraživanju PISA 2018. Republika „Hrvatska je na ukupnoj skali matematičke pismenosti ostvarila rezultat od 464 boda (interval pouzdanosti od 95 %: 459–469 bodova), što smješta Hrvatsku najviše na 39., a najniže na 41. mjesto u poretku svih zemalja sudionica u istraživanju“ (Markočić Dekanić i sur., 2018, str. 147). Razlog lošijih rezultata naših petnaestogodišnjih učenika možemo tražiti u različitosti podsustava našeg osnovnoškolskog obrazovanja. Očigledno je da podsustav razredne nastave kao i podsustav predmetne nastave u našem obrazovanju nisu isti te prema rezultatima PISA istraživanja očigledno nisu jednako uspješni. Bognar (2016) tumači da razrednu nastavu vodi jedan učitelj koji može upoznati sve učenike i prilagoditi zahtjeve njihovim interesima i mogućnostima.

Promjene u odgojnom i obrazovnom sustavu podrazumijevanju uvođenje učinkovitih nastavnih strategija. U istraživanju TALIS 2018 utvrđeno je kako hrvatski učitelji rijetko rabe strategije „vezane uz poticanje aktivnoga učenja, pri čemu između 28 % (Hrvatski jezik i prirodoslovlje) i 40 % (Matematika) učitelja i nastavnika navodi da nikada ne zadaju projekte za čije je završavanje potrebno najmanje tjedan dana.“ Nadalje i strategije kognitivne aktivacije ne primjenjuju se često, „pri čemu učitelji i nastavnici navode da nikada ne zadaju zadatke koji nemaju očita rješenja i ne traže od učenika da samostalno odaberu metode rješavanja kompleksnih zadataka“ (Markočić Dekanić i Gregurović, 2020, str. 4). Kako bi se poboljšali rezultati naših učenika iz matematike učitelji bi trebali primjenjivati neka od rješenja koja su se pokazala uspješnim, odnosno potrebno je organizirati nastavu tako da svi učenici mogu napredovati i postići uspjeh, ali i omogućiti da ih što više rješava problemske zadatke koji zahtijevaju zaključivanje i primjenu naučenog znanja.

Republika Hrvatska bila je svjedok nekoliko reformskih pokušaja, međutim one nisu doprinijele unapređenju obrazovnog sustava, a vrlo se malo vodilo računa o kvaliteti učenja učenika, njihovim postignućima, stručnom usavršavanju nastavničkog kadra te o kulturi škole (Bognar, 2016). Bognar i Lukaš (2016) ističu kako su reformski pokušaji u Hrvatskoj započinjali stvaranjem obrazovnih standarda i mijenjanjem kurikuluma. Prije dvadesetak

godina započela je izrada Projekta hrvatskog odgojno-obrazovnog sustava za 21. stoljeće (Ministarstvo prosvjete i športa, 2002), nakon toga uslijedio je Hrvatski nacionalni obrazovni standard za osnovnu školu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, 2005). Poslije toga na red je došla Strategija obrazovanja, znanosti i tehnologije (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta, 2014) u kojoj se ističe važnost cjeloživotnog učenja koje se ostvaruje formalnim i neformalnim obrazovanjem, ali i oblicima informalnog obrazovanja (Pastuović, 2008). Zatim je uslijedila Cjelovita kurikularna reforma (<http://www.kurikulum.hr>). Naposljetku, 2018. godine u osnovnim i srednjim školama započela je primjena eksperimentalnog programa Škola za život (<https://skolazazivot.hr/sazetak-hrvatski>). Cilj je bio da se 80 škola (do 50 osnovnih i do 30 srednjih) u školskoj godini 2018./2019. uključi u eksperimentalnu provedbu programa. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja (2019) utvrdio je da „škola za život“ nije postigla očekivane rezultate. Bognar (2016) smatra da se suštinske promjene mogu ostvariti samo ako su dobro pripremljene i vođene. To podrazumijeva uvođenje učinkovitih nastavnih strategija u svakodnevnu praksu naših škola. Dosadašnje reforme u našem odgojnom i obrazovnom sustavu nisu u dovoljnoj mjeri vodile računa o kvaliteti učenja učenika i kulturi škole već su se usmjerila na izradu novih dokumenata pretpostavljajući da će učitelji pročitavši ih mijenjati svoju praksu, ali to se ipak nije dogodilo. Međutim, promjene će se ostvariti samo ako učenik bude u središtu odgojno-obrazovnog procesa u kojemu su osigurani uvjeti za uspješno učenje i razvoj. Takve uvjete mogu osigurati kompetentni učitelji kojima je omogućena autonomija djelovanja. Kako bi se to postiglo potrebno je stimulirati upise najkvalitetnijih kandidata na učiteljske i nastavničke studije (Markočić Dekanić i Gregurović, 2020) te im omogućiti kvalitetno inicijalno obrazovanje i stručno usavršavanje (Bognar, 2017). Osim toga, kako bi Republika Hrvatska mogla konkurirati razini visokorazvijenih zemalja mora postati inovativno društvo prilagodljivo budućim izazovima.

2.3. Suštinske promjene u nastavi

Fullan (2010) ističe kako voditelji obrazovnih promjena trebaju pridobiti obrazovne djelatnike tako da pokušaju razumjeti njihova razmišljanja i uvjerenja čak i ako se s njima ne slažu. Bognar (2016) ističe kako bi predvodnici promjena trebali i sami biti spremni učiti. Kako bi se rezultati pratili i planirali potrebno je koristiti metodologiju akcijskih istraživanja kako bi unapređenja bila dostupna izvan konteksta u kojima su ostvarena i poslužila za reformu kurikuluma. Potrebno je osnažiti učitelje kako bi pokrenuli suštinske promjene u svojoj praksi. Također je

nužno planirati različite oblike stručnog usavršavanja stvaranjem zajednica učenja (Bognar i Filipov, 2020).

Fullan (2006) ne smatra da su standardi i kurikulumi nedostatni jer predstavljaju nepotpune teorije o onome što se uistinu događa u učionicama i školama. Kurikularni dokumenti na nacionalnoj razini trebali bi sadržavati samo ključne elemente, a ostatak razrade trebalo bi prepustiti školama i učiteljima. Za razliku od standarda i kurikuluma, poticanje promjena omogućuje stvaranje situacija u kojima učitelji mogu učiti jedni od drugih. U tome važnu i ključnu ulogu ima zajednica učenja. Prema Stoll i Fink (2000) u zajednici učenja uče odrasli i djeca. Pri tome je važno da „ako učitelji žele pomagati učenicima u razvijanju vještina i kompetencija, stvaranju znanja, učitelji trebaju sami iskusiti izgradnju svojeg profesionalnog znanja“ (Fullan, 2006, str. 4). Nadalje, kada učitelji surađuju zajedno na poboljšanju svoje prakse učenici više uče. Suradnja izgrađuje kolektiv koji je odgovoran za stalno unapređivanje nastavne prakse pa i učeničko učenje. Hoogsteen (2020) tvrdi da školsko okruženje može utjecati na kolektivnu učinkovitost učitelja. Rezultat su kolektivne učinkovitosti učitelja produktivni obrasci ponašanja koji doprinose boljim obrazovnim rezultatima učenika.

Promjene u nastavi moguće je ostvariti primjenom visoko učinkovitih nastavnih strategija koje utječu na učeničko učenje. Na temelju rezultata brojnih istraživanja Marzano i sur. (2005) na temelju analize istraživanja utvrdili su postojanje devet učinkovitih nastavnih strategija. To su: utvrđivanje sličnosti i razlika, rezimiranje i bilježenje, povećanje truda i davanje priznanja učenicima, zadavanje domaćih zadaća i vježbanje, primjena nelingvističkih prikaza pri učenju, suradničko učenje, postavljanje ciljeva učenja i davanje povratnih informacija, stvaranje i provjeravanje hipoteze, te uporaba pitanja, natuknica i organizatora znanja u nastavi.

Odjel za obrazovanje i stručno usavršavanje (Department of Education and Training, 2020) preporuča učiteljima u Australiji korištenje deset visokoučinkovitih strategija:

- 1) *Postavljanje jasnih ciljeva* omogućuje razumijevanje kriterija uspjeha, posvećivanje učenju i stvaranje izazova. Veličina učinka za jasno postavljanje ciljeva iznosi 0,48 i predstavlja visok učinak na rang listi učinka (<https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement>).
- 2) *Dobro strukturiranje nastave* učenicima usmjerava pozornost na glavne ideje i stvara jasne korake za izgradnju znanja i vještina.
- 3) *Eksplisitno poučavanje* podrazumijeva korištenje izričitih uputa tijekom poučavanja kako bi se izgradilo učenička znanja i razvile vještine.

- 4) Konkretni *primjeri* smanjuju kognitivno opterećenje učenika, omogućavajući im da se usredotoče na razumijevanje procesa koji vodi do odgovora.
- 5) *Suradničko učenje* predstavlja mogućnost ostvarivanja promjena u nastavi jer se oslanja na aktivno sudjelovanje učenika u pregovaranju o ulogama, odgovornostima i ishodima.
- 6) *Višestrukim izlaganjem novim sadržajima i vještinama* razvija se duboko učenje te poboljšava zadržavanje naučenog kod učenika.
- 7) *Učeničko postavljanje pitanja učiteljima* služi kao interaktivno sredstvo kojim se angažiraju i aktiviraju učenici te se koristi kao alat za provjeru učeničkog razumijevanja nastavnih sadržaja.
- 8) *Povratne informacije* doprinose boljem razumijevanju učenika, omogućuju učiteljima prikupljanje informacija o razumijevanju učenika, a pomažu i učiteljima u unapređivanju vlastita učenja i provjeravanju utjecaja vlastite prakse.
- 9) Primjenjivanjem *metakognitivnih strategija* učitelji pomažu učenicima u razvijanju svijesti o učenju te u održavanju motivacije za učenjem kao i kontroli nad vlastitim učenjem.
- 10) *Diferenciranim učenjem* učitelji mogu ostvariti promjene proširivanjem znanja i vještina svakog učenika bez obzira na njihovo trenutno znanje (Department of Education and Training, 2020).

Kyriacou (2009) ističe da se učinkovito poučavanje može definirati kao poučavanje u kojem učitelj ostvaruje i postiže uspješno učenje učenika. Također ističe značajke dobrog učitelja kojeg učenici doživljavaju kao osobu koja ostvaruje dobro uređeno nastavno okruženje za učenje, objašnjava zadatke koje učenici trebaju obaviti i pruža im pomoć, prijateljski je nastrojen i pruža učenicima podršku. Osim toga, ističe da će dobri učitelji ostvariti promjene u nastavi ako koriste različite nastavne metode i aktivnosti učenja, zatim koriste niz postupaka kako bi zadržali učenikovo zanimanje za nastavu te upravljaju nastavom tako da su učenici aktivni i angažirani u zadacima koje rješavaju. Osim toga, kvalitetni učitelji prikupljaju pouzdane dokaze iz mnogih izvora o nastavi i učenju učenika te sudjeluju u raspravama s kolegama o tim dokazima, čineći tako učinak učeničkog učenja vidljivim sebi i drugima (Hattie, 2012). Važno je istaći da učenje nije događaj, to je proces koji započinje površinskim, a završava dubokim učenjem.

Marzano i sur. (2005) smatraju da ako praktičari žele ostvariti promjene u nastavi i ostvariti uspješnu nastavu potrebno je uključiti tri srodna područja: nastavne strategije, metode upravljanja razredom i kurikulum koji je sastavio nastavnik. Učitelji mogu koristiti uspješne

strategije kako bi vodili nastavu na način da maksimalno razviju mogućnost povećanja uspjeha kod učenika. Kako bi se ostvarile promjene u nastavi nije dovoljno učiteljima predstaviti nastavne strategije jer se tu često radi o kompleksnom umijeću koje je prvo potrebno pravilno demonstrirati pazeći na varijacije u primjeni. Zatim je važno da učitelji pokušaju primijeniti novo umijeće u praksi te im osigurati promišljenu refleksiju koja se može ostvariti kroz neformalne rasprave s kolegama, ali i kroz situacije formalnog obrazovanja (Kleickmann i sur., 2013). Škole i prosvjetna tijela trebaju omogućiti učiteljima stručno usavršavanje koje uključuje provedbu novih nastavnih strategija uz kontinuiranu refleksivnu raspravu učitelja i voditelja stručnog usavršavanja. Učitelji trebaju dobivati pravodobne povratne informacije o uspješnosti svoje nastave. Nadalje, potrebna je i prilagodba strategija specifičnom profesionalnom kontekstu te interesima i mogućnostima učenika. Suštinske promjene u nastavi nije lako postići, ali učitelji ih moraju željeti postići te donijeti odluku o njihovoj provedbi.

3. SUVREMENA NASTAVA MATEMATIKE

Bognar i Matijević (2006, str. 405) ističu da je nastava „najsustavnije organiziran aspekt odgojno-obrazovnog procesa“. Tradicionalna nastava uglavnom se oslanja(la) na učitelja kao predavača i učenika koji treba riješiti zadane zadatke, i uglavnom ima pasivnu ulogu. Osim toga, tradicionalna nastava temeljila se na učiteljevom prezentiranju nastavnih sadržaja učenicima, dok ga učenici promatraju i slušaju. Učenicima su prezentirane gotove činjenice pri čemu njihov intelektualni napor uglavnom izostaje. Bognar i Matijević (2005, str. 381) ističu kako je „za tradicionalnu nastavu karakteristično autoritarno vođenje u kojoj dominira frontalna nastava. Inicijativa je u rukama nastavnika, a učenik je u pasivnom položaju i treba izvršavati zahtjeve nastavnika“.

Suvremena nastava je nastava orijentirana na učenika u kojoj učitelj više nije predavač, nego preuzima ulogu organizatora, mentora i koordinatora. Prema Jank Mayer i van Dick (1991) postoji mnogo koncepata nastave koji pokušavaju prevladati jedan (ili više) deficita tradicionalne škole (prema Gudjons, 1994, str. 201). Karakteristika suvremene nastave jest orijentacija prema učeniku što svoje uporište nalazi u reformskoj pedagogiji. Gudjons (1994) ističe važnost otvorene nastave, aktivnog učenja, otvorenog kurikuluma, škole, nastave itd. Za otvorenu nastavu karakteristična su sljedeća obilježja:

Poticajna sredina za učenje u razredu s obilježjima radionice, slobodna i fleksibilna organizacija učenja s manje frontalnog rada, kreativne, samostalne metode učenja, prihvatljiva atmosfera za učenje, dokumentacija o rezultatima učenja u razredu, dnevni i tjedni plan (za promotriti, samostalni i individualni rad), slobodan rad primjeren vlastitim odlukama djece, radovi vezani za pojedine projekte, mnoštvo radnih sredstava što omogućuju pojedinačni, partnerski ili grupni rad, krug stolaca (za dogovaranje zajedničkih poslova) itd. (Gudjons, 1994, str. 200)

Gudjons (1994) također navodi projektnu nastavu, nastavu okrenutu iskustvu, praktično učenje, nastavu okrenutu djelovanju u kojoj se kroz aktivno učenje prevladava razdvojenost škole i života.

Tot (2010, str. 67) ističe da se „obilježja suvremene nastave ogledaju u takvoj organizaciji koja utječe na razvoj spoznajnih i općih intelektualnih sposobnosti učenika. Jedan od ključnih zadataka suvremene nastave je otkrivanje i usvajanje znanja na način da čine cjelovit i logički dosljedan sustav“. To je nastava koja stavlja naglasak na inovativnost, razvoj kritičkog mišljenja, informatičku pismenost, socijalne kompetencije. Stoll i Fink (2000, str. 169) ističu „ako učenici znaju što će se učiti – ako su upoznati sa standardima uspješnosti koji određuju rezultat – tad imaju puno više mogućnosti za učenje“. Kvaliteta nastave ima velik utjecaj na učenje učenika. Međutim, učenje pripada učenicima i kako bi se učenik uključio u proces učenja

potrebno mu je osigurati sigurno nastavno okruženje koje mu dopušta da bude odgovoran za svoje učenje i da bude realizator svog uspjeha.

Nadalje, suvremena nastava utječe na razvoj općih intelektualnih i spoznajnih sposobnosti učenika, potiče ih na samostalno donošenje zaključaka i kreativnost u rješavanju zadataka. Suvremena nastava temelji se na učenju u kojemu je učenik aktivni istraživač i težište je na njegovoj samostalnoj aktivnosti. To je nastava u kojoj učenici sami upravljaju svojim učenjem i sami izabiru metode rješavanja problema. Međutim, suvremenu nastavu nije lako ostvariti u tradicionalnom školskom kontekstu. Jedan od načina kako mijenjati tradicionalnu nastavu jesu akcijska istraživanja. Bognar (2011) navodi da su učitelji akcijski istraživači ostvarili suštinske promjene. On ističe da se tradicionalna i suvremena nastava razlikuju u ciljevima, programima, metodama ocjenjivanja i ulozi učitelja.

Matematika je prisutna u svakodnevnom životu pojedinaca i od suštinskog je značaja za mnoge druge grane ljudske djelatnosti. Pojedinci koji su tijekom svog obrazovanja stekli matematičke kompetencije lakše se mogu snaći u svakodnevnom životu. Suvremena nastava matematike orijentirana je prema učenicima, zahtijeva veću učeničku aktivnost i odgovornost za vlastite rezultate.

Hattie (2017) smatra da nastava matematike mora biti promišljeno dizajnirana i pažljivo orkestrirana te uvijek usredotočena na utjecaj učitelja na učenje učenika. Nastava matematike najučinkovitija je kada započne s odgovarajućim izazovnim ciljevima i kada je usklađena s kriterijima uspješnosti. Učitelji moraju biti jasni o tome gdje su njihovi učenici, kamo trebaju ići i kakvo je njihovo postignuće u učenju. Također Hattie (2017) vjeruje da je učeničko uspješno učenje matematike ukorijenjeno u diskursu i suradnji s učiteljima te svojim vršnjacima. To je orkestrirano oko odgovarajuće izazovnih zadataka. Učenici bi tijekom učenja trebali više razmišljati i razgovarati nego učitelji kako bi ostvarili napredak. U učenju matematike važno je da učenici rabe svoju metakogniciju, razmišljajući o svom mišljenju, ocjenjujući kamo idu, kako napreduju te kako žele ići dalje. Suvremena nastava matematike ne podrazumijeva samo obrazovnu komponentu i puko stjecanje znanja, nego i odgojnu komponentu usmjerenu na suradnju, ostvarivanje zajedničkih ciljeva, uvažavanje sebe i drugih te spremnost na suočavanje s problemima.

Suvremena nastava matematike traži od učenika da ispuni jasno postavljene ciljeve te da razvije kompetencije koje mu omogućuju snalaženje u društvu koje zahtijeva višu razinu matematičkog znanja i umijeća. Učenik treba postati aktivni istraživač koji do znanja dolazi na osnovu osobnog napora te nastojati što samostalnije ostvariti svoj individualni maksimum.

Suvremena nastava matematike napušta stare pristupe poučavanja u kojima učitelj stavlja pred učenike matematička pravila, formule i zaključke. U takvoj nastavi nastoji se da učenici sami konstruiraju matematičko znanje kroz proces vođenog otkrivanja. Kako bi došli do otkrića, učenici bi trebali koristiti različite konkretne materijale kojima mogu manipulirati i uz pomoć kojih mogu otkrivati različite matematičke odnose. Fokusiranje na konceptualno razumijevanje matematike i strategije rješavanja problema dobrodošle su promjene koje su učeniku u suvremenoj nastavi zasigurno potrebne. Jukić Matić (2017) naglašava matematičko rješavanje problema kao jednu od ključnih značajki suvremene nastave. Uspješno rješavanje problema može se odraziti na učenički povećani osjećaj samoefikasnost (Jukić Matić, 2017). Povratno, osjećaj samoefikasnosti u rješavanju problema ima pozitivan utjecaj na sposobnost učenika da riješi problem pomažući mu u smanjenju anksioznosti pri bavljenju matematikom.

Suvremena nastava matematike treba se suočiti i s problemom razvoja kreativnog mišljenja i stvaralačkih sposobnosti učenika. Kurnik (2008) smatra da suvremena nastava matematike pruža razne mogućnosti učenicima za rješavanje matematičkih problema. On navodi sljedeća načela nastave matematike pomoću kojih se određuju uvjeti učenja u nastavi matematike:

- „načelo primjerenosti
- načelo znanstvenosti
- načelo interesa, svjesnosti, aktivnosti
- načelo sistematičnosti i postupnosti
- načelo zornosti i apstraktnosti
- načelo problemnosti
- načelo trajnosti znanja, vještina i navika
- načelo individualizacije
- načelo ekonomičnosti i racionalizacije
- načelo historičnosti i suvremenosti“ (Kurnik, 2002).

Sva su načela važna i međusobno povezana te se trebaju koristiti i primjenjivati u nastavi matematike, međutim potrebno je istaknuti načelo znanstvenosti. „Načelo znanstvenosti nastave matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne strane i zahtjeva i zakonitosti matematike kao znanosti s druge strane“ (Kurnik, 2008, str. 319). Kako bi učenici mogli pratiti matematička dostignuća potrebno ih je usmjeravati prema spoznajama novih matematičkih istina, traganju za različitim rješenjima, te samostalnom dolaženju do novih rezultata. Suvremena reformska nastojanja koja uključuju i nastavu

matematike zahtijevaju napuštanje predavačke nastave te uvođenje nastavnih strategija i metoda koje promoviraju veću aktivnost i kreativnost učenika, uvođenje učenika u istraživačku nastavu što može dovesti do boljih učeničkih postignuća. Kurnik (2008) smatra da se suvremena nastava matematike bitno razlikuje od tradicionalne:

Suvremena nastava matematike načelno pretpostavlja drugačiju spoznajnu djelatnost učenika od tradicionalne. Težište se postavlja na razvijanju umijeća samostalnog i stvaralačkog proučavanja matematike od strane učenika, te stvaranju preduvjeta za uspješnu primjenu stečenih matematičkih znanja i umijeća. Samostalna spoznajna djelatnost učenika pri proučavanju matematike ostvaruje se u velikoj mjeri primjerenim izborom i korištenjem nastavnih zadataka. Na taj način zadaci postaju važno sredstvo pri oblikovanju učenika sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika i doprinose razvoju njihovih matematičkih sposobnosti i stvaralačkog mišljenja. (Kurnik, 2008, str. 325)

Glasnović Gracin i Jukić Matić (2021) smatraju da udžbenici matematike mogu služiti kao sredstvo za promjene i usmjerenost prema suvremenoj nastavi. Današnje je oslanjanje učitelja na udžbenik veće nego prije. Naime, udžbenik se ne odnosi samo na sadržaj već i na nove pristupe učenju. Ta dvostruka uloga udžbenika u skladu je s praksom mnogih drugih zemalja u kojima se reforma matematičkog kurikuluma provodi tako da se objavljivanje novih udžbenika smatra važnim korakom u provedbi promjena. U današnjem svijetu i suvremenoj nastavi matematike digitalni udžbenici zajedno s digitalnim platformama sve više zamjenjuju tiskane udžbenike (Glasnović Gracin i Jukić Matić, 2021). U suvremenoj nastavi matematike učitelji za nastavu osim tiskanih udžbenika koriste i druge resurse, uglavnom digitalne. Čini se ipak da udžbenici i dalje imaju važnu ulogu unatoč povećanju dostupnih sadržaja na internetu.

3.1. Značajke učinkovite nastave matematike

Učinkovito učenje matematike često se povezuje s kvalitetnom nastavom općenito. Učinkovita nastava koja pozitivno utječe na rezultate učenika iz matematike podrazumijeva učeničko usvajanje konceptualnog znanja te njihovo aktivno uključivanje u proces učenja. Hiebert i Grouws (2007) ističu dvije značajke kvalitetne nastave matematike: a) razumijevanje matematičkih pojmova koherentnom, strukturiranom i povezanom raspravom o ključnim matematičkim idejama i b) bavljenje i zaokupljenost učenika važnim matematičkim idejama. U rezultatima TIMSS video studije ističu se tri ključne dimenzije kvalitetne nastave matematike: „1) stupanj kognitivne zahtjevnosti koja je ponuđena učenicima kroz postavljene zadatke i razrednu raspravu; 2) stupanj potpore učenju ostvaren kroz pažljivo praćenje učeničkog procesa učenja, individualne povratne informacije i prilagodljive upute; 3)

učinkovito upravljanje razredom i vremenom“ (Klieme i sur., 2001, prema Kunter i Voss, 2013, str. 100).

Hattie (2017) ističe da je jedan od ključnih elemenata učinkovite nastave dizajniranje jasnih namjera učenja i kriterija uspjeha koji uključuju kombinaciju površinskog učenja, dubinskog učenja i transfera učenja ovisno o odluci nastavnika. Površinsko učenje odnosi se na razumijevanje i usvajanje osnovnih pojmova i vještina. Ta uvodna razina učenja, odnosno inicijacija i rano razumijevanje novih ideja počinje razvojem konceptualnog razumijevanja. Hattie (2017) smatra da površinsko učenje nije plitko učenje. Ne radi se o nevažnim znanjima i vještinama koje ne doprinose konceptualnom razumijevanju. Učenici trebaju vrijeme i odgovarajuće aktivnosti za ostvarivanje površinskog učenja. Važno je kroz površinsko učenje dovesti učenike do razumijevanja osnovnih pojmova, izgraditi matematičke navike, usavršiti strateško razmišljanje i početi razvijati tečnost vještina.

Međutim, ključno je omogućiti dubinsko učenje koje podrazumijeva razumijevanje ključnih pojmova, ovladavanje postupcima rješavanja zadataka te učvršćivanje veze između matematičkih ideja. To se često postiže u suradnji i interakciji s vršnjacima koristeći nove ideje i informacije. Transfer naučenog je krajnji cilj koji je često teško ostvariti. Učenje zahtijeva od učenika da primijene ili prenesu svoje znanje, vještine i strategije na nove zadatke i nove situacije. Prijenos kao krajnji cilj podrazumijeva da učenici preuzmu odgovornost za vlastito učenje te da su sposobni primijeniti naučeno u novim zadacima, da misle metakognitivno te da primjenjuju ono što poznaju u životnim situacijama. Kada učenici dosegnu tu razinu, učenje se može smatrati učinkovitim.

Hierbert i Grouws (2007, prema Jacobse i Harskamp, 2011) smatraju važnim način na koji učenici uče. Hattie (2017) tumači da nastava treba biti svrhovita i uvijek se treba usredotočiti na učenje učenika. Kada su ciljevi učenja postavljeni i obrazloženi, učitelj može povećati svoju jasnoću i učenici mogu razumjeti što mogu očekivati od procesa učenja. „Uloga učitelja jest da prikupljaju pouzdane dokaze iz mnogih izvora, te da održavaju kolaborativne razgovore s kolegama i uenicima o tim dokazima, čineći tako učinak njihovog učenja vidljivim sebi i drugima.“ (Hattie, 2012, str. 19). Jednako su važni kriteriji koji se koriste za motivaciju učenika i dopuštaju im da razviju naviku i vještinu samoprocjene.

Prema Shellard i Moyer (2002, str. 16) postoje tri ključne komponente učinkovite nastave matematike:

1. pojmovno razumijevanje

2. razvijanje proceduralne pismenosti učenika
3. promicanje kompetencija kroz smisleno rješavanje problemskih zadataka.

Shellard i Moyer (2002) smatraju da učinkoviti matematički programi sadrže sljedeće komponente:

- visokokvalitetna nastava matematike
- kurikulum matematike koji je usklađen s državnim i nacionalnim standardima temeljenim na rezultatima istraživanja o učinkovitoj pedagogiji
- uporaba prikladnih matematičkih alata čiji je odabir vezan uz ciljeve koji podržavaju učenje
- metode ocjenjivanja koje su integrirane u nastavu i informiraju učitelje o svojoj praksi te pružaju povratne informacije učenicima o individualnom napretku
- diferencirana nastava koja podržava učenike na različitim razinama učenja potičući ih na učenje
- mogućnosti sudjelovanja učitelja u suradničkim aktivnostima koje doprinose njihovom razvoju profesionalnih vještina
- suradnja s roditeljima i njihovo informiranje o kurikulumu matematike, vrednovanju i nastavnim metodama.

Anthony i Walshaw (2009) ističu načela djelotvorne matematičke pedagogije koja mogu utjecati na učenje učenika. Ta načela jesu: etika skrbi, matematička komunikacija, organiziranje učenja, zadatci za učenje, matematički jezik, povezivanja, prikazi i alati za matematički razvoj i znanje učitelja. Osim toga ističu:

- 1) da svi učenici bez obzira na dob mogu razvijati pozitivne matematičke identitete i postati uspješni matematičari
- 2) važnim postići međuljudsko poštovanje i osjetljivost na različitost kulturnih nasljeđa, procesa razmišljanja i kontekstualnih čimbenika u učionici
- 3) temelje se na međuljudskom poštovanju i osjetljivosti i reagiraju na mnogostrukost kulturnih nasljeđa, procesa razmišljanja i stvarnosti pronađenih u svakodnevnoj učionici
- 4) potrebu zalaganja za poboljšanje niza nastavnih čimbenika koji će pridonijeti cjelovitom razvoju učenika (Anthony i Walshaw, 2009, str. 149).

Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da je važno utvrditi elemente učinkovite nastave jer to može pomoći obrazovnoj politici u donošenju odluka o unapređenju nastave. Pri tome treba voditi računa da kvaliteta nastave ovisi prije svega o učiteljima koji moraju biti osposobljeni za

njezinu realizaciju. Analizom relevantne literature Jukić Matić i sur. (2020) utvrdili su sljedeće značajke učinkovite nastave matematike: određivanje matematičkih ciljeva koji vode učenju, uvažavanje učeničkog predznanja, korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, vođenje smislene matematičke rasprave, izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja, korištenje tehnologije, suradničko učenje, povratne informacije. Ukratko, nastava je matematike učinkovita kada na najbolji način promiče učenje učenika. Međutim, kulturne norme također utječu na način na koji se te značajke provode (Jukić Matić i sur., 2020).

Razumijevanje učinkovite nastave matematike često ovisi i o kulturnim uvjerenjima pojedinih zemalja (Jukić Matić i sur., 2020). Primjer nam daju Cai i sur. (2009) koji su proveli istraživanje čiji je cilj bio istražiti uvjerenja učitelja iz SAD-a, Australije, kontinentalne Kine, Hong Konga o učinku nastave matematike na postignuća učenika. Pokazalo se da u sve četiri zemlje učitelji smatraju kako je prvo potrebno odrediti kriterije učinkovite nastave matematike. Kriteriji učinkovite nastave matematike su poželjni ishodi učenja i procesi koji do toga dovode. Nadalje, Andrews i sur. (2014) smatraju da visoka postignuća učenika na međunarodnim istraživanjima mogu biti više povezana s kulturnim uvjerenjima pojedinih zemalja, nego sa specifičnim metodama poučavanja.

Kaasila i Pehkonen (2008) proveli su istraživanje u Finskoj u kojem su se usredotočili na to kako budući učitelji tumače učinkovitu nastavu matematike. Utvrđeno je sedam značajki koje studenti – budući učitelji – prepoznaju u kvalitetnoj/učinkovitoj nastavi matematike: usmjerenost na ciljeve, slušanje i razumijevanje mišljenja učenika, fleksibilnost, različite metode poučavanja, fokusiranost na probleme, povezanost sa svakodnevnim iskustvima, procjena učenja učenika i strategije koje koriste pri rješavanju problema. U Finskoj budući učitelji naglašavaju fleksibilnost i povezanost sa svakodnevnim iskustvima, ali ne i apstraktnu strukturu matematičkog znanja. Time je razumijevanje studenata učiteljskih studija slično pragmatičnoj koncepciji nastave koja se sreće u Australiji, Sjedinjenim Američkim Državama i Njemačkoj, a razlikuje se od formalističkog pristupa koji zastupaju učitelji u Kini, Hong Kongu i Francuskoj. Rezultati ovog istraživanja nakon uspoređivanja s ranijim rezultatima iz studija provedenih u drugim zemljama govore da su koncepcije učinkovite nastave matematike vezane uz kulturu.

3.1.1. Određivanje matematičkih ciljeva koji vode učenju

U nastavi matematike potrebno je odrediti jasne matematičke ciljeve koji usmjeravaju učenje određene teme (Jukić Matić i sur., 2020). „Cilj označava ono što se želi postići, ono čemu se teži“ (Tot i Klapan, 2008, str. 61). Pastuović (1999) razlikuje svrhu i cilj odgoja i obrazovanja. On definira svrhu

...kao krajnji cilj, odnosno stanje koje predstavlja kraj neke aktivnosti ili procesa, a postiže se sumativnim djelovanjem ostvarenosti više različitih ciljeva. Svrha je ono što pojedinim ciljevima daje smisao, što ih usustavljuje. Svrha je opća dok su ciljevi određeni konkretnim prilikama i namjerama te očitovani u konkretnim postupcima. Odnos pojmova svrhe i cilja mogao bi se najkraće odrediti ovako: svrha je najopćiji cilj. (Pastuović, 1999, str. 133–134)

Prema Noddingsu (2007) općem cilju (svrsi) podređeni su konkretniji ciljevi. Primjerice, opći cilj – svrha je pripremiti učenika za demokratsko građanstvo. Ciljevi su jasni i nedvosmisleni i izvedeni su iz općeg cilja, odnosno svrhe. Jedna od najpoznatijih klasifikacija obrazovnih ciljeva zove se Bloomova taksonomija koju su kasnije revidirali Anderson i Krathwohl (2001). Obrazovni ciljevi razvrstani su u tri područja: kognitivno (znanje i razumijevanje, intelektualne sposobnosti), afektivno (stavovi, emocije, mišljenja, interesi), psihomotoričko (vještine, motoričke sposobnosti, tj. umijeća) (Jurić i sur., 2019). Prema Anderson i Krathwohl (2001) u kognitivnom području navodi se šest različitih razina: pamćenje, razumijevanje, primjena, analiza, evaluacija i stvaranje. Vlahović Štetić (2009, str. 42) ističe da „razine odražavaju dubinu misaonih procesa u obradi informacija – viša razina u taksonomiji pokazuje da je student dublje obradio sadržaje te da njima može baratati na složeniji način“.

Za ostvarivanje ciljeva važnu ulogu imaju zadatci. Tot i Klapan (2008, str. 61) ističu da se „zadacima predviđa mijenjanje ponašanja osobe putem iskustvenog učenja. Ponekad podrazumijevaju i jasno izražene uvjete u kojima će se te promjene dogoditi.“ Kurnik (2000) ističe da je matematički zadatak složen objekt koji je određen uvjetima, ciljem, teorijskom osnovom, rješavanjem i osvrtom. Zadatci su često navedeni u udžbenicima i temelje se na ishodima koji su definirani u predmetnom kurikulumu. Za razliku od kompetencija koje mogu biti općenito određene, ishodi su učenja prema Vlahović Štetić (2009, str. 41) operacionalno definirani: „Ishodi učenja su promjene kod studenata koje se mogu precizno izraziti kao ono što će student znati, razumjeti, odnosno moći pokazati nakon učenja.“

Sullivan (2011) smatra kako postavljanje ciljeva predstavlja važan princip za ostvarivanje učinkovite nastave matematike. Učitelji trebaju predočiti ciljeve i objasniti učenicima što se od njih očekuje tijekom nastave. Brahier i sur. (2014) smatraju da su ciljevi potrebni kako bismo

učenike usredotočili na učenje. Dakle, u učinkovitoj nastavi matematike važno je postaviti jasne ciljeve koje učenici razumiju, a koji im služe za praćenje napredovanja u učenju.

Nacionalno vijeće učitelja matematike (2014) ističe da „učinkovita nastava matematike postavlja jasne matematičke ciljeve koje učenici uče, postavlja ciljeve kroz napredovanje u učenju i koristi ciljeve za usmjeravanje nastavnih odluka“. Matematički ciljevi koje koriste vješti učitelji mogu postati vodilja učenicima koji se za njih opredjeljuju i prema kojima mogu usmjeravati svoje ideje oblikovane prema važnim matematičkim konceptima. Također smatraju da jasni ciljevi učenja mogu pomoći učiteljima u razmatranju:

- a. usklađenosti nastavnih zadataka i ciljeva učenja učenika
- b. strategija rješavanja matematičkih zadataka koje imaju najviše potencijala za otkrivanje ideja o cilju učenja
- c. pitanjima koja bi trebali koristiti tijekom nastave kako bi potaknuli učenike na razmišljanje o ključnim idejama (Nacionalno vijeće učitelja matematike, 2014).

Kaasila i Pehkonen (2008) smatraju da ciljevi nastave matematike trebaju pomoći učiteljima u planiranju, ostvarivanju i evaluaciji nastave matematike. Prema Hattieju (2009) ciljevi reguliraju djelovanje i objašnjavaju prirodu veze između prošlosti i budućnosti. Također, određivanje ciljeva temelji se na pretpostavci da je ljudsko djelovanje intencionalno. Glavni razlog učinkovitosti ciljeva jest taj da vode do jasnijeg pojma uspjeha i usmjeravaju pozornost učenika na relevantne sadržaje i aktivnosti.

Izazovni ciljevi mogu motivirati učenike da ulažu napore kako bi ih ostvarili. Hattie (2009) smatra da učinkoviti učitelji postavljaju učenicima odgovarajuće izazovne ciljeve, a zatim strukturiraju situacije kako bi ih učenici mogli postići. Ako učitelji mogu potaknuti učenike na predano ostvarivanje izazovnih ciljeva i ako im pružaju povratne informacije o uspješnosti učenja, vjerojatnije je da će ciljevi biti postignuti. Izazovni ciljevi pružaju informacije o očekivanoj razini uspješnosti, a mogu imati velik učinak na razvoj samoeфикаsnosti i samopouzdanja.

Martin (2006, prema Hattie, 2009) navodi uporabu „osobnih rekorda“ kao jedan od načina na koji se učenicima mogu postaviti ciljevi specifični za određeni zadatak. To je metoda u kojoj učenici imaju razlog zbog kojega žele postići određeni ishod (npr. žele pobijediti svoju prethodnu razinu postignuća). Ministarstvo znanosti u državi Ontario (2020, str. 8) smatra potrebnim na početku definirati pojmove ili rječnik koji će se koristiti u nastavi. Nakon toga, potrebno je definirati cilj učenja jezikom prilagođenim učenicima. Na kraju, kada su učenici

duboko u procesu učenja, potrebno je definirati kako uspješno postići ciljeve učenja i uspostaviti veze s drugim sadržajima te promovirati samorefleksiju.

Prema Nacionalnom vijeću učitelja matematike (2014) postoji osam djelotvornih praksi nastave matematike između kojih se nalazi i postavljanje matematičkih ciljeva. Nacionalno vijeće učitelja matematike (2014) tumači da učitelji postavljaju jasne ciljeve kako bi artikulirali učeničko učenje matematike za vrijeme jedne ili niza lekcija. Važno je s učenicima raspraviti ciljeve kako bi razumjeli zašto sudjeluju u određenim aktivnostima učenja. Nadalje, učitelji ciljeve koriste za usmjeravanje i planiranje nastave te donošenje odluka za vrijeme nastave. Uloga učenika jest uključiti se u raspravu o ciljevima vezanim uz njihovo učenje matematike. Oni trebaju procjenjivati i pratiti vlastito razumijevanje i napredak prema postavljenim ciljevima. Kaasila i Pehkonen (2009) smatraju da je nastava matematike učinkovita ako ciljevi koje postavlja učitelj doprinose učeničkom razumijevanju matematičkih koncepata i razvoju vještina. Ciljevi bi u nastavi trebali usmjeravati sve aktivnosti učitelja: njihovo planiranje, realizaciju i evaluaciju nastave.

3.1.2. Uvažavanje učeničkog predznanja

Anthony i Walshaw (2009) ističu načela učinkovite nastave matematike. Među tim načelima nalazi se i nadogradnja znanja na učeničko postojeće znanje. Koristeći prethodno znanje učenika učitelji planiraju učenje matematike tako da učenicima omogućuju nadogradnju novog znanja na njihova postojeća znanja i iskustva. Odnosno, upoznavajući učeničko predznanje i razinu na kojoj se nalaze učitelji mogu donijeti informirane, strateške odluke o sadržaju koji treba učiti (Campbell, 2008). Pri tome učitelji ne pokušavaju popraviti učenikove slabosti i popuniti praznine, već se nadovezuju na postojeće vještine i predznanje koristeći ih kao resurs za naredno učenje. Kada se učenici suoče s novim problemom, prethodno znanje i iskustva mogu im poslužiti kao baza za razvoj strategija rješavanja problema. Prema Sullivan (2011) učinkoviti učitelji procjenjuju i koriste prethodno znanje učenika i prilagođavaju svoje poučavanje njihovim interesima. Novo znanje potrebno je povezati s pričama koje daju kontekst i razlog za učenje.

Prema Schunk (2012) model procesuiranja informacija pri učenju i pamćenju počinje reagiranjem na informacije, povezivanjem novih informacija s prethodno stečenim znanjem i njegovom organiziranjem kako bi ga se učinilo smislenim.

Učenje započinje zamjećivanjem vanjskih podražaja (npr. vizualnih, auditivnih) uz pomoć odgovarajućih osjetila. Percipirani podražaji prenose se u radnu memoriju koja omogućuje njihovo svjesno doživljavanje. Radna memorija ima ograničen kapacitet i trajanje. Naime, ona može zadržati oko sedam informacijskih jedinica (npr. slova, riječi, brojeva ili jednostavnih pojmova). Dok se informacije nalaze u radnoj memoriji, aktivira se odgovarajuće znanje u trajnoj memoriji i premješta u radnu memoriju kako bi se povezalo s novim informacijama. To omogućuju kontrolni procesi (npr. ponavljanje, kodiranje, zamišljanje, odlučivanje, organiziranje) koji reguliraju protok i procesuiranje informacija. Informacije koje se nalaze u radnoj memoriji mogu se zaboraviti ili pohraniti u trajnu memoriju. Pamćenju informacija pridonosi njihova smislenost, organiziranost i elaboracija. Usvojeno znanje sastoji se od informacija međusobno povezanih u mrežu. Povezivanje pojmovnih mreža u veće cjeline koje predstavljaju složene strukture nazivaju se sheme. (Bognar i Filipov, 2020, str. 208)

Pritchard (2009) shemu definira kao višedimenzionalni spremnik velike količine znanja ili kao okvir za brojne pojmove i veze između pojmova. Svaki pojam povezan je s drugim pojmovima. Postojeća shema predstavlja zbroj trenutnog stanja znanja i učenikova razumijevanja određene teme, događaja, radnje itd. Ako se događa novo učenje, dobro je utvrditi ono što je već poznato o određenoj temi.

Ningsih i Retnowati (2020) tumače da učitelji trebaju planirati učenikovo učenje. Planiranje učenja zahtijeva kreativnost i adekvatno znanje. Campbell (2008) ističe strategije aktiviranja predznanja koje uključuju čitanje, pisanje, raspravljanje, glasno razmišljanje i vizualne znakove ili organizatore. Nadalje, učenici mogu prikazati podatke i/ili koncepte bilo kojim grafičkim organizatorom. Najčešće se primjenjuju Vennov dijagram, konceptualna mapa i umna mapa. Pri izradi grafičkih organizatora važno je provjeriti jesu li zasebni dijelovi smisleno povezani i stavljeni u pravilne međuodnose. Za njihovu izradu mogu poslužiti neki od digitalnih alata i programa. Osim toga, aktivnosti koje se mogu koristiti kako bi se aktiviralo prethodno znanje moguće je ostvariti zapisivanjem pojmova u tablicu s tri stupca. U prvi stupac upisuju se informacije koje učenici znaju, u drugi informacije koje misle da znaju i u posljednji stupac upisuje se jedna informacija koju trebaju ili žele znati. Ispunjeni obrazac može se kasnije upotrijebiti u oblikovanju dnevnika učenja pojedinca.

Učenje se događa kada učenik koristi prethodno naučeno znanje kao potporu za novo učenje ili rješavanje problema. Postoje dva aspekta uspješnog učenja: identifikacija odgovarajućeg predznanja i prilagodba odgovarajućih aspekata tog predznanja. Kada se ti procesi uspješno izvedu dolazi do učenja. Međutim novo se učenje i ne mora dogoditi ako se jave dvije vrste problema:

- 1) učenik ne može identificirati korisno predznanje ili identificira predznanje koje nije prikladno za zadani problem

- 2) učenik može prepoznati korisno predznanje, ali ga nije u mogućnosti upotrijebiti na odgovarajući način (Sidney i Alibali, 2013).

Sidney i Alibali (2018) sugeriraju uporabu zadataka za zagrijavanje koji služe kao poticaj za raspravu pri rješavanju problema.

3.1.3. Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema

Jedna od kompetencija čijem bi razvoju trebala doprinijeti nastava matematike jest rješavanje problema. „Rješavanje problema možemo definirati kao pronalaženje odgovora na pitanje koje se javlja u zadatku, a za čije iznalaženje nije poznata metoda ili procedura.“ (Cindrić, 2016, str. 54). Učenici moraju biti uključeni u rješavanje problema i raspravu o zadacima koji promiču matematičko zaključivanje.

Nacionalno vijeće učitelja matematike (2014) ističe tri važne spoznaje u vezi s uporabom matematičkih zadataka:

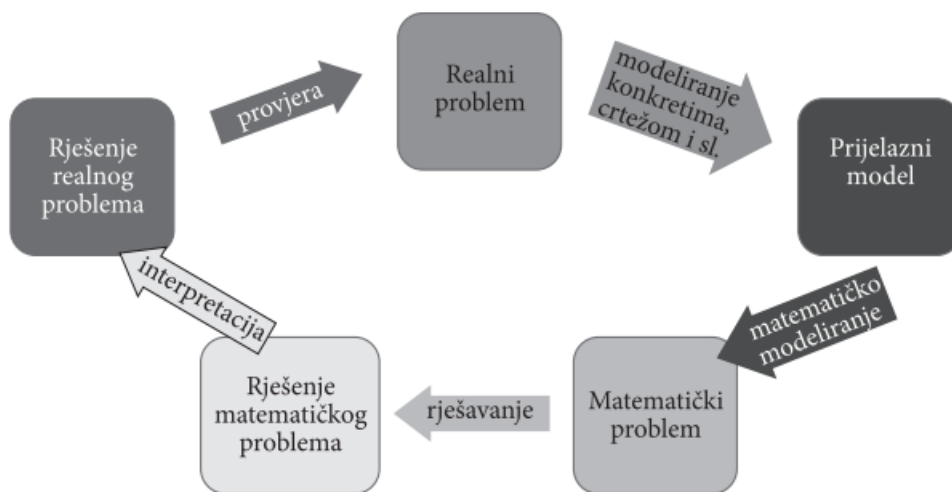
- 1) svi zadatci ne pružaju jednake mogućnosti za razvoj mišljenja i učenje učenika
- 2) učenje učenika najbolje se odvija kad se rješavaju zadatci koji stalno potiču učenike na razmišljanje i rasuđivanje, a najmanje pri rješavanju rutinskih i proceduralnih zadataka
- 3) kognitivno visokozahjevne zadatke najteže je implementirati u nastavu i često se tijekom nastave transformiraju u manje zahjevne.

Jukić Matić i sur. (2020) ističu da učenike treba poticati na aktivnost nudeći im bogate i izazovne zadatke koji:

- a) omogućuju donošenje odluka
- b) uključuju učeničko ispitivanje pretpostavki, dokazivanje, objašnjavanje, promišljanje, tumačenje
- c) promoviraju raspravu i komunikaciju
- d) potiču originalnost i otkrivanje
- e) potiču pitanja „što ako?“ i „što ako ne?“
- f) sadrže priliku za iznenađenje.

Prema Kurnikovu načelu problemnosti (2002) sadržaji su nastave matematike logički povezani, razlikuju se po složenosti i težini. Ako učenici u početku rješavanja problemskih zadataka ne zamjećuju probleme ni teškoće i sve im se čini jasnim, a jasnoća potječe od nedostatka shvaćanja, metodika u toj situaciji učitelju nudi jednostavan odgovor: treba

primijeniti načelo problemnosti. Kurnik (2011) načelo problemnosti iskazuje na sljedeći način: „Najprije učiniti nejasnim, a zatim jasnim.“ (Kurnik, 2002, str. 149). Dakle, učenicima se prvo postavlja problem pazeći da bude primjeren većini učenika. Prva nejasnoća koja se pojavi znak je uspjeha. Učenik tada treba uložiti dosta truda kako bi savladao teškoće i riješio problem. Primjenom načela problemnosti učitelj matematike potiskuje prividnu jasnoću, upoznaje učenike s problemima koje oni ne uočavaju i poboljšava razvoj njihova mišljenja. Načelo problemnosti najviše dolazi od izražaja u problemskoj nastavi.



Slika 1. Shema matematičkog modeliranja problema (Cindrić, 2016, str. 54)

Matematičko modeliranje problema (slika 1) počinje realnom situacijom, a koja se oblikuje u matematički zadatak. Matematički problem rješavamo nakon što je zapisan u matematičkom obliku, a rješenje objašnjavamo u svjetlu realnog problema, a to je ujedno i njegovo rješenje. Cindrić ističe kako „modeliranje problema u okviru matematičkog zadatka može rezultirati ne samo matematičkim modelom realne situacije, nego jednostavno i nekim oblikom prijelaznog modela.“ To znači da u početku učenik ima realnu problemsku situaciju zadanu riječima u obliku zadatka. Nakon toga slijedi „modeliranje konkretima, crtežom ili shemom“ čim učenik „odabere adekvatan način prikaza zadatka“ (Cindrić, 2016, str. 53). Učenik može korištenjem različitih oblika matematičkog zadatka riješiti realni problem.

Prema Posamentier i Krulik (2009) problem je situacija s kojom se suočava učenik, ona zahtijeva rješenje, a put do odgovora nije odmah poznat. Problemski zadatak jest onaj u kojem metoda rješavanja nije otprije poznata, sadrži nepoznate sastavnice, cilj nije očit, a od učenika

se očekuje potrebna koncentracija i umno naprezanje. Zadatci najčešće mogu imati nekoliko točnih rješenja kao i načina na koji se do njih dolazi. Premda neki učenici mogu biti dobri u rješavanju problema, potrebno ih je naučiti kako da to čine.

Mink (2009) smatra da je pri poučavanju rješavanja problema važno učenicima predstaviti pristup koji mogu koristiti u rješavanju različitih problema. Polya (1956) predlaže sljedeće korake koji vode prema rješenju problema:

1. *Razumijevanje problema.* Učenik treba razumjeti zadatak kako bi ga mogao riješiti. Kako bi razumio zadatak, učenika treba usmjeriti na njegove glavne sastavnice i uvjete zadatka.
2. *Osmišljavanje plana rješavanja.* Potrebno je doći do ideje plana. Ideja se može pojavljivati postupno, ali i slučajno. Uloga učitelja jest nenametljivo pomoći učenicima u planiranju.
3. *Realizacija plana.* Kako bi učenik uspio u realizaciji plana potrebna mu je koncentracija, ranije stečeno znanje, disciplina, a ponekad i sreća. Plan daje konture i potrebno je uvjeriti se pristaju li uvjeti zadatka uz te konture. Zato je potrebno po redu ispitati detalje sve dok zadatak ne bude jasan.
4. *Osvrtom na dobiveno rješenje i postupak koji ih je do toga doveo* učenici produbljuju svoje znanje i povećavaju svoje vještine u rješavanju novih zadataka.

Navedeni koraci mogu se primijeniti na različitim vrstama problema od jednostavnih do složenih. Također, učenike upućuju i daju im smjernice u rješavanju različitih problema.

Hattie (2009) smatra da rješavanje problema uključuje čin definiranja ili utvrđivanja uzroka problema, kao i prepoznavanje, određivanje prioriteta i odabir alternativa za rješenje. Moguće je i pomoću višestrukih perspektiva za otkrivanje problema izraditi plan intervencije, a zatim procijeniti ishod. Gijbels (2005, prema Hattie, 2009) iznosi šest osnovnih karakteristika problemskog učenja:

1. učenje je usmjereno na učenika
2. učenje se događa u malim skupinama
3. učitelj predstavlja voditelja rješavanja problema
4. autentični problemi predstavljani su na početku učenja
5. problemi s kojima se susreću učenici služe kao alati za postizanje potrebnog znanja i vještina
6. nova znanja stječu se samostalnim učenjem.

Hattie (2009) također smatra da je primjena znanja, a ne samo stjecanje znanja srce uspjeha problemskog učenja. Za površinsko učenje rješavanje problema može imati ograničene, pa čak i negativne učinke. Međutim, za dublje učenje, pod pretpostavkom da učenici već imaju površinsko znanje, rješavanje problema može imati pozitivan učinak. Učenje temeljeno na rješavanju problema stavlja veći naglasak na razumijevanje nego na reprodukciju ili površinsku razinu znanja.

Grouws i Cebulla (1999) predlažu smjernice za poboljšanje uspjeha učenika u matematici, a njima pripada i učenje novih vještina tijekom rješavanja matematičkih problema. Oni smatraju da rješavanjem pažljivo odabranih nerutinskih problema, učenici mogu razviti razumijevanje mnogih važnih matematičkih ideja kao i sofisticirane matematičke vještine. Učenici, također, pri rješavanju problemskih zadataka mogu koristiti i svoje intuitivno i neformalno znanje iz drugih područja. Nadalje, oni sugeriraju da se učitelji ne trebaju prvo usredotočiti na razvoj vještina, a zatim prijeći na problemsko rješavanje zadataka. I jedno i drugo može se povezati. Učenici tijekom rješavanja zadataka mogu i sami razviti strategije koje im najbolje odgovaraju.

Posamentier i Krulik (2009) predlažu sljedeće strategije koje se mogu primijeniti za rješavanje različitih problemskih zadataka:

1. *Organiziranje podataka korištenjem tablice ili grafikona* važan je korak u analizi bilo kojeg skupa podataka. Podatci ili problemi koji su vizualno prikazani pružaju mogućnost uočavanja veze ili pronalaženja uzorka. Tablica ili grafikon pruža izvrstan način uočavanja trenda i procjenjivanja pretpostavki.
2. *Pogađanje i provjeravanje ili metoda pokušaja i pogrešaka* moćna je strategija kojom učenik pretpostavlja što bi moglo biti rješenje (to mora biti inteligentno pretpostavljanje, a ne samo neupućeno nagađanje), a zatim nastavlja s provjeravanjem tog nagađanja u uvjetima problema. Učenik istražuje različita moguća rješenja te pokušava otkriti što u rješenju funkcionira, a što ne. Čak i ako nagađanje nije točno, može dati naznaku drugim mogućnostima ili pomoći drugima u rješavanju problema.
3. *Rješavanje jednostavnijeg problema ili podjela problema na dijelove* strategija je koja omogućuje rješavanje problema na više od jednog načina. Ako je problem prevelik ili suviše složen, ovom strategijom učenici mogu podijeliti problem na više dijelova kako bi dobili uvid u rješavanje izvornog problema. Nakon rješavanja jednostavnijih problema, učenici mogu prijeći na izvorni (možda složeniji) problem.

4. *Gluma, oponašanje i simulacija* strategija je prikladna za učenike trećeg i četvrtog razreda osnovne škole jer oni glumom mogu preuzeti ulogu iz problema i sastaviti plan rješavanja.
5. U *rješavanju unatrag* učenici prvo postavljaju očekivani rezultat, a tek onda razvijaju strategiju koja vodi prema rješenju.
6. *Pronalaženje uzorka i proširivanje niza* također može poslužiti za rješavanje problema.
7. *Logičkim zaključivanjem* izvode se zaključci koji dovode do narednih zaključaka. Logički se postupak nastavlja sve dok se problem ne riješi.
8. *Izradom crteža* nastoji se razjasniti problem što bi trebalo pomoći učeniku u rješavanju problema i dovesti ga do određenog zaključka. Izradi crteža treba se posvetiti određena pozornost jer nepravilan crtež može odvesti do pogrešnog zaključka ili krivog puta rješavanja.
9. *Promjena stajališta* podrazumijeva rješavanje problema na posve drugačiji način od uobičajenog i najizravnijeg načina.

Prema Sinay i Nahornick (2016) rješavanje problema temeljni je element za učenje matematike. Učenje rješavanja problema i učenje rješavanjem problema učenicima se pružaju brojne mogućnosti za povezivanje matematičkih ideja i razvijanje pojmovnog razumijevanja. Oni smatraju da je u nastavi matematike važno predstaviti problemske zadatke koji su složeni i bogati, omogućuju više ulaznih točaka, različite pristupe rješavanja, angažman učenika bez nametnutih proceduralnih koraka.

Kaasila i Pehkonen (2009) smatraju da bi nastava usmjerena na rješavanje problema trebala biti organizirana češće. Učitelji imaju važnu ulogu u poučavanju rješavanja problemskih zadataka. Oni organiziraju okruženje pri rješavanju problemskih zadataka, odabiru i konstruiraju problemske zadatke i vode postupak njihova rješavanja. Suurtamm (2015) ističe važnost stvaranja takvog ozračja u učionici u kojemu se učenici osjećaju sigurno riskirajući i istražujući alternativne strategije pomoću kojih mogu, ali ne moraju doći do rješenja problema. Potrebno je poticati učenike da načine višestruke prezentacije zadataka kako bi olakšali njihovo razumijevanje i rješavanje. Važno je omogućiti im da podijele svoje razmišljanje jedni s drugima i s cijelim razredom. To podrazumijeva omogućavanje prostora za kretanje i komunikaciju kako bi učenici stvorili međusobnu interakciju. Također učitelji mogu poticati matematičko razumijevanje tijekom rješavanja problemskih zadataka stvarajući matematičke zajednice učenja te postavljajući učenicima poticajna pitanja i slušajući njihova razmišljanja.

Sinay i Nahornick, (2016) smatraju da zadatci koji promiču rješavanje problema učenicima pružaju brojne mogućnosti povezivanja ideja i razvijanje konceptualnog razumijevanja. S obzirom na to da učenici ne znaju izravan put za postizanje rješenja, oni su prisiljeni samostalno misliti i donositi odluke kako bi konstruirali rješenje. Pri tome im treba pomoć učitelja. U tablici 1 navedene su smjernice za aktivnosti učitelja i učenika.

Tablica 1. Smjernice za učitelje i učenike pri rješavanju zadataka koji promiču rješavanje problema i zaključivanje u nastavi (Nacionalno vijeće učitelja matematike, 2014, str. 24)

Učitelji	Učenici
a) motiviraju učenje učenika pružajući im mogućnosti za istraživanje i rješavanje problema koji nadograđuju i proširuju njihovo trenutno matematičko znanje b) odabiru zadatke koji pružaju više ulaznih točaka pomoću različitih alata i prezentacija c) redovito postavljaju zadatke koji zahtijevaju visoku razinu kognitivne potražnje d) podržavaju učenike u istraživanju zadataka e) potiču učenike u korištenju različitih pristupa i strategija pri rješavanju zadataka.	a) rješavajući zadatak ustraju u istraživanju i rasuđivanju b) preuzimaju odgovornosti za osmišljavanje zadataka crtanjem i povezivanjem sa svojim prethodnim znanjem i idejama c) koriste alate i prikaze po potrebi za potporu svom mišljenju i rješavanju problema d) prihvaćaju i očekuju da njihovi kolege koriste različita rješenja i pristupe o kojima međusobno razgovaraju nastojeći objasniti rješenja i strategije koje su rabili.

3.1.4. Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja

National Research Council⁴ (2001, prema Hierbert i Grouws, 2007) tumače da je matematička stručnost postignuta s pet vrsta kompetencija:

- konceptualno znanje – razumijevanje matematičkih pojmova, operacija i odnosa
- proceduralno znanje – vještina provođenja postupaka brzo, točno, učinkovito i na odgovarajući način
- strateška kompetencija – sposobnost formuliranja, predstavljanja i rješavanja matematičkih problema
- prilagodljivo zaključivanje – temelji se na logičkom mišljenju, refleksiji, objašnjenju i provjeri

⁴ Nacionalno istraživačko vijeće (prev. S. M. H.).

- produktivna nastrojenost – podrazumijeva stav prema matematici kao razumnoj, korisnoj i vrijednoj ulaganja osobnog truda.

Za nastavu matematike posebnu važnost imaju konceptualno i proceduralno znanje.

Tradicionalna nastava tražila je od učenika usvajanje proceduralnog znanja, za razliku od suvremene koja je usmjerena na obje vrste znanja. Konceptualno znanje odnosi se na razumijevanje ključnih matematičkih ideja. Ono uključuje generalizacije i temeljne principe koji se ne moraju nužno odnositi na specifične probleme. Konceptualno znanje može biti implicitno ili eksplicitno i primjenjuje se fleksibilno (Burns i sur., 2015). Hierbert i Grouws (2007) definiraju konceptualno razumijevanje kao mentalne veze među matematičkim činjenicama, postupcima i idejama. Ova definicija sugerira da pojmovno razumijevanje raste kako mentalne veze postaju bogatije i raširenije. Konceptualno znanje omogućuje razumijevanje pojmova i ideja bitnih za neko područje te odnosa među njima. Bogato je odnosima i razumijevanjem apstraktnih ideja. Do njega se mora doći promišljenim reflektivnim učenjem (Rittle-Johnson i Schneider, 2015). Rittle-Johnson i sur. (2001) smatraju da se proceduralno znanje odnosi na izvršavanje niza koraka ili aktivnosti potrebnih za postizanje određenih ciljeva. Ta vrsta znanja usko je vezana uz specifične probleme i ne može se generalizirati za razliku od konceptualnog znanja koje doprinosi dubljem razumijevanju i prenosivim znanjima u vezi s rješavanjem problema. Proceduralno znanje omogućuje razvoj vještina, učenje strategija, omogućava brzo rješavanje problema. To je znanje koje podrazumijeva poznavanje pravila, algoritama i postupaka. Učenici koji dobivaju više konceptualnih uputa generiraju više postupaka i mogu te postupke koristiti u rješavanju novih problemskih zadataka. Proceduralne upute dovode do skromnijeg razumijevanja i rješavanja tipičnih problemskih zadataka. Dakle, učenici koji su učili postupke rješavanja određenih problemskih zadataka mogli su te postupke primijeniti na samo jednu vrstu zadataka. Konceptualne upute pomažu učenicima u samostalnom osmišljavanju postupaka za rješavanje različitih zadataka. Kada učenici razumiju temeljne pojmove i principe, sposobni su sami riješiti nove problemske zadatke.

Lauritzen (2012) smatra da konceptualno znanje podrazumijeva poznavanje odnosa, dok je proceduralno znanje sredstvo za postizanja određenih ciljeva. Proceduralno znanje je nužno, ali nedovoljan uvjet za konceptualno znanje. Rittle-Johnson i Schneider (2015) ističu kako je u nastavi matematike potrebno razvijati obje vrste znanja jer se međusobno podupiru. Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da je proceduralno znanje potrebno izgraditi iz konceptualnog razumijevanja tako da učenici s vremenom postanu vješti i fleksibilno rabe postupke i algoritme

dok rješavaju kontekstualne matematičke probleme. Nacionalno vijeće učitelja matematike (2014) smatra da kada učenici razmišljaju konceptualno, mogu modelirati matematičke situacije na različite načine i znaju kako različite prikaze koristiti u različite svrhe. Osim toga, učenicima treba omogućiti fleksibilno biranje metoda za rješavanje kontekstualnih matematičkih problema. Nije dovoljno da učenici samo nauče provoditi matematičke postupke. Oni trebaju znati koji je postupak najprikladniji i najproduktivniji u danj situaciji, što se s određenim postupkom postiže te kakve rezultate mogu očekivati. Mehaničko izvođenje postupka bez razumijevanja njegove matematičke osnove često dovodi do netočnih i bizarnih rezultata. Hierbert i Grouws (2007) ističu dvije značajke koje promoviraju razvoj konceptualnog znanja: učiteljevo eksplicitno objašnjavanje matematičkih pojmova te učeničko bavljenje matematičkim idejama. Oni također smatraju da matematički zadatci koji imaju veće kognitivne zahtjeve, učenicima omogućuju veći razvoj konceptualnog znanja. Učeničko nastojanje rješavanja težih matematičkih zadataka jest ključan sastojak konceptualnog učenja.

Prema Schneider i sur. (2011) prva teorija kauzalnih veza između konceptualnog i proceduralnog znanja tumači da učenici u početku stječu konceptualno znanje npr. putem roditeljskih objašnjenja, a zatim izvode i grade proceduralna znanja putem opetovanog vježbanja rješavanja problema. Prva teorija tumači da učenici prvo nauče postupke npr. pomoću istraživačkih aktivnosti, a zatim postupno apstrakcijskim postupcima dolaze do konceptualnog znanja. Treća mogućnost, ponekad označena kao pogled inaktivacije, temelji se na međusobnoj neovisnosti konceptualnog i proceduralnog znanja. Rittle-Johnson i sur. (2001) predlažu kao četvrtu mogućnost iterativni model. Oni su utvrdili postojanje pozitivnih korelacija između proceduralnog i konceptualnog znanja i njihove prognostičke povezanosti. Dakle, proceduralno i konceptualno znanje razvijaju se istovremeno te se nadopunjuju. Rittle-Johnson i Alibali (1999) proveli su istraživanje kojim su ispitali kako poučavanje koncepata o jednadžbama utječe na rješavanje problemskih zadataka i kako poučavanje rješavanja problemskih zadataka utječe na konceptualno znanje o jednadžbama. Istraživanje je pokazalo da su učenici koji su imali veće proceduralno znanje, što je pokazala njihova sposobnost ispravnog rješavanja problemskih zadataka, imali veće konceptualno znanje o jednadžbama. Učenici koji su dobili konceptualne upute nisu samo povećali svoje konceptualno razumijevanje, već su stvorili i nekoliko ispravnih, fleksibilnih postupaka rješavanja problemskih zadataka. Učenici koji su primili proceduralne upute nisu samo usvojili ispravan postupak rješavanja problema, nego su i povećali svoje konceptualno razumijevanje. Dakle, konceptualno razumijevanje može voditi

do generiranja postupka, a proceduralno znanje može dovesti do većeg konceptualnog razumijevanja.

Rittle-Johnson i Schneider (2015) predlažu sljedeće metode za poboljšanje obiju vrsta znanja:

- 1) *Promicanje usporedbe alternativnih postupaka rješenja* jedan je od učinkovitijih pristupa. Učenici prvo rješavaju test. Zatim proučavaju po dva različita primjera postupaka rješenja istoga problema koji im je bio zadan u testu i pozvani su o njima individualno razmišljati. Učenici koji su u predtestu primijenili jedan od postupaka rješenja, pri uspoređivanju primjera pokazali su veće proceduralno znanje ili veće konceptualno znanje. Učenici koji u predtestu nisu znali osmisлити nijedno rješenje nisu imali koristi za konceptualno ili proceduralno znanje od ove tehnike premda je usporedba poboljšala proceduralnu fleksibilnost. Dakle, usporedba postupaka može pomoći učenicima steći konceptualno i proceduralno znanje samo ako imaju dovoljno predznanja.
- 2) *Poticanje samoobjašnjenja pri traženju rješenja*. Na primjer, poticanje učenika osnovne škole da objasne zašto su neka rješenja zadataka točna ili netočna doprinosi većem prijenosu proceduralnog znanja. S druge strane, poticanje srednjoškolskih učenika na objašnjenje svog načina mišljenja pri rješavanju problema doprinosi konceptualnom znanju.
- 3) *Pružanje mogućnosti istraživanja problema prije objašnjenja koncepata*. Učenici osnovne škole koji su riješili set nepoznatih matematičkih problema, nakon čega su im objašnjeni matematički pojmovi, pokazali su veće konceptualno uz podjednako proceduralno znanje u odnosu na učenike koji su rješavali probleme nakon lekcije. Rješavanje problema prije lekcije može se ostvariti korištenjem obrnutog učenja (Bergmann i Sams, 2015). Obrnuto učenje učitelju pruža dodatno vrijeme za nastavu, a učenicima aktivnije učenje. Velik broj interaktivnih aktivnosti dostupan je učenicima za učenje prije nastave matematike. Za vrijeme nastave učenici mogu sudjelovati u aktivnostima koje zahtijevaju višu kognitivnu razinu, omogućuju istraživanje i rješavanje složenijih problema te suradnju. Pored toga, učenici mogu izradom vlastitih sadržaja pridonijeti stvaranju zbirke interaktivnih materijala.

3.1.5. Vođenje smislene matematičke rasprave

Stein i sur. (2008) ističu da „ključni izazov s kojim se učitelji matematike suočavaju u provođenju trenutnih reformi jest organiziranje rasprave u cijelom razredu koja koristi odgovore učenika na postavljene matematičke zadatke na način koji unapređuje učenje matematike u cijelom razredu“ (Stein i sur., 2008, str. 314). Razredne rasprave o matematičkim temama važna su metoda za razvoj matematičkog mišljenja. Jukić i sur. (2020) smatraju kako učitelji trebaju biti voditelji rasprava koje se vode između učenika kako bi mogli izgraditi razumijevanje matematičkih ideja. Razgovarajući sa svojim vršnjacima i sudjelujući u argumentiranju i rasuđivanju tijekom rasprave u razredu učenicima se pruža prilika za učenje. U učionicama u kojima se koristi rasprava, odgovori učenika oblikuju tijekom razgovora u učionici i informiraju učitelja o učeničkom mišljenju.

Literacy and Numeracy Secretaria (2010) ističe potrebu koordiniranja rasprava u cijelom razredu kako bi se razvilo učeničko matematičko razumijevanje. To od učitelja zahtijeva da istovremeno izvedu nekoliko matematički utemeljenih pedagoških poteza:

- a. poučavanje učenika o načinu sudjelovanja u matematičkim raspravama
- b. eksplicitno predstavljanje matematičkih pojmova i strategija povezanih s nastavnim ciljem polazeći od učeničkih matematičkih rješenja
- c. stvaranje matematičkih vizualnih zapisa razredne rasprave kako bi ih svi učenici mogli vidjeti
- d. korištenje matematičkih oznaka za bilježenje učeničkog matematičkog mišljenja kako bi učenici naučili da je pisanje zabilježeno mišljenje.

Prema Stein i sur. (2008) tipična lekcija usmjerena na raspravu cijelog razreda često se odvija u tri faze. Počinje s učiteljevim pokretanjem matematičkog problema koji utjelovljuje važne matematičke ideje i koji može biti riješen na više načina. Tijekom ove faze pokretanja učitelj upoznaje učenike s problemom i s alatima koji su im dostupni za rješavanje tog zadatka. Od učenika se očekuje individualno rješavanje zadatka. Nakon toga slijedi faza istraživanja u kojoj učenici rade na problemu, često raspravljajući o njemu u paru ili u manjim grupama. Dok učenici rade na problemu, potiče ih se da ga riješe na bilo koji način koji ima smisla te trebaju biti spremni objasniti svoje pristupe rješavanja drugim učenicima u razredu. Nastava se završava razrednom raspravom i sažetkom različitih pristupa rješavanja problema. Tijekom ove faze rasprave i sažetka razni pristupi rješavanja problema prikazani su cijelom razredu na pregled i raspravljane. Kersaint (2015) ističe da učitelji moraju pripremiti učenike na matematičku raspravu. Kako bi podržali učenike, učitelji moraju pomoći učenicima u stvaranju

vizije očekivanih ponašanja i postupaka, pripremiti ih za njihove uloge ili igranje uloga te dosljedno jačati ta ponašanja. Samo kroz aktivno sudjelovanje učenici mogu naučiti kako funkcionira matematička rasprava.

Za tumačenje i procjenu učeničkog matematičkog razmišljanja koje dolazi do izražaja u raspravama cijelog razreda učitelji mogu rabiti sljedeće kriterije:

- preciznost oko detalja rješavanja problemskih zadataka (uključuje relevantan izbor metode ili strategije za rješavanje problema)
- pretpostavke i generalizacije koje pokazuju detalje rješavanja problemskog zadatka
- jasnoća u smislu logičke organizacije
- dijagrami, tablice i matematički primjeri
- elaboracija koja objašnjava matematičke ideje
- primjerena i točna upotreba matematičke terminologije (Literacy and Numeracy Secretariat, 2010).

Stein i sur. (2008) predstavljaju pet koraka koji olakšavaju matematičku raspravu oko kognitivno zahtjevnih zadataka. Namjera je olakšati raspravu učiteljima kojima je ovo novi način nastave. Namjerno se uklanja naglasak s improvizacijskog aspekta vođenja rasprave u korist fokusiranja na zadatke. Kroz planiranje, učitelji mogu predvidjeti učeničke odgovore i donositi odluke o tome kako strukturirati prezentacije učenika. Proširenjem vremena za osmišljavanje odluka o učenju (od nekoliko sekundi do minuta, ili čak sati) ovaj model omogućuje sve većem broju učitelja da se osjećaju i budu bolje pripremljeni za rasprave. Predloženi su koraci sljedeći:

1. *Predviđanje matematičkih odgovora učenika* u vezi s nastavnim zadacima koje treba riješiti. To uključuje mnogo više od jednostavnog procjenjivanja hoće li zadatak biti na odgovarajućoj razini težine ili hoće li izazvati dovoljno zanimanje učenika. Nadilazi razmatranje hoće li se dobiti „točan odgovor“. Predviđanje odgovora učenika uključuje razmatranje kako učenici mogu protumačiti matematički problem.
2. Cilj *praćenja učeničkih odgovora* jest identificirati matematički potencijal pojedinih strategija ili prikaza koje učenici koriste tijekom učenja. Umjesto da samo bilježe koliko učenika radi na problemu, učitelji bi također trebali koristiti matematičke ideje koje se koriste tijekom učenja. Učitelji bi se trebali aktivno baviti s onim što učenici govore i čine, procijeniti matematičku valjanost učeničkih ideja te procijeniti matematičko razmišljanje učenika posebno kad nešto nije u redu.

3. *Odabir učenika koji će prezentirati matematičke odgovore tijekom faze rasprave i sažimanja.* Praćenjem odgovora učenika u razredu, učitelj odabire učenike koji će svoje odgovore podijeliti s ostatkom razreda. Tipičan način za to jest pozivanje određenih učenika (ili skupine učenika) kako bi predstavili svoj rad i time započeli raspravu. Osim toga, učitelj može zatražiti dobrovoljce, a zatim odabrati određenog učenika za kojeg zna da ima posebno korisnu ideju koju bi trebao podijeliti s razredom.
4. *Namjerno određivanje redoslijeda učenčkih odgovora.* Nakon odabira učenika koji će prezentirati potencijalna rješenja zadataka, učitelj donosi odluku o redoslijedu prezentacije. Određivanjem redoslijeda prezentiranja rješavanja problema učitelji povećavaju mogućnost postizanja ciljeva rasprave.
5. *Cilj povezivanja učenčkih odgovora* jest da se prezentacije učenika nadovežu jedna na drugu kako bi se razvile odgovarajuće matematičke ideje. Smisao je vođenja smislene matematičke rasprave stavljanje učenika u središte učenja, a uloga je učitelja kretati se učionicom kako bi osigurao da se smisljena i duboka rasprava održi. Nadalje, uloga je učenika sudjelovanje, propitkivanje i povezivanje vlastita znanja.

Michaels i O'Conorr (2015) ističu da se u raspravi često radi o složenoj temi s ambicioznim ciljem učenja. Ona uključuje socijalne, kulturalne, psihološke i kognitivne dimenzije, sve u kontekstu glavne akademske aktivnosti. Oni također predlažu četiri temeljna cilja za raspravu koji bi trebali osigurati produblјivanje učenčkog razumijevanja i obrazloženja:

1. *Pomaganje pojedinim učenicima kako bi podijelili vlastite misli.* Sudjelovanjem u raspravi učenik mora biti u stanju naglas dijeliti misli i odgovore koji su djelomično razumlјivi drugima. Ako to učini jedan ili dva učenika, tada rasprave nema. Umjesto toga prevladava monolog ili u najboljem slučaju dijalog između učitelja i učenika.
2. *Pomaganje učenicima u orijentiranju i međusobnom pažljivom slušanju.* Nije pravilno samo sjediti i čekati svoj red na govor, nego je nužno slušati druge i pokušavati ih razumjeti kako bi mogli pridonijeti pravoj raspravi. Konačni cilj uključuje razmjenu ideja i rasuđivanje, a ne iznošenje nepovezanih misli.
3. *Pomaganje učenicima u produblјanju obrazloženja.* Učenici izražavanjem svojih misli i slušanjem tuđih ideja ne moraju nužno stvoriti akademski produktivnu raspravu. To se posebno događa ako ne iznose čvrsta i održiva obrazloženja. Većina učenika nije vješta u produblјivanju vlastitih ideja. Ključna uloga učitelja jest kontinuirano i vješto poticati učenike na obrazlaganje i dokazivanje tvrdnji.

4. *Poticanje učenika na uključivanje obrazloženja drugih učenika.* Učenici u raspravi preuzimaju ideje i razmišljanja drugih učenika i odgovaraju na njih. Na taj način može se pokrenuti prava rasprava, koja će podržati robusno učenje, a uzbudljiva je za učenike i za učitelje.

Literacy and Numeracy Secretariat⁵ (2010) predstavljaju metodičke pristupe koji se mogu koristiti u raspravama:

Šetnja galerijom – interaktivna je tehnika matematičke rasprave koja potiče učenike na usredotočeno i aktivno bavljenje matematičkim idejama drugih učenika izvan svojih uobičajenih mjesta sjedenja. Često se provodi nakon što su učenici riješili problemski zadatak. Rješenja se mogu snimati na računala, napisati na papir ili objavljevati na plakatima. Šetnja galerijom predviđena je u trajanju od 10 do 20 minuta. Učenicima daje priliku za upoznavanje različitih rješenja te pružanje usmene i pisane povratne informacije kojom se može poboljšati jasnoća i preciznost rješenja. Varijacije su šetnje galerijom sljedeće:

- (a) *Rješavanje problema u malim skupinama* – učenici u malim skupinama razvijaju jedno rješenje problemskog zadatka i zapisuju ga na papir.
- (b) *Rasprava u malim grupama* koje naizmjenice čitaju i analiziraju tuđa rješenja, bilježe komentare, pitanja i/ili daju prijedloge za poboljšanje.
- (c) *Učiteljevo promatranje* – za vrijeme razgovora učenika o rješenjima problemskih zadataka njihovih vršnjaka, učitelj kruži po učionici, ocjenjuje razumijevanje i bilježi učeničko korištenje matematičkog rječnika kao i njihove miskoncepcije.
- (d) *Rasprava cijelog razreda* – ostvaruje se nakon što učenici u manjim grupama objedine komentare, pitanja i prijedloge za poboljšanje u usmeni izvještaj koji će biti predstavljen cijelom razredu.

Matematički kongres omogućuje učitelju za vrijeme blok-sata usredotočiti učenike na nekoliko velikih matematičkih ideja. Ideje su izvedene iz matematičkog mišljenja koje su učenici koristili tijekom rješavanja zadataka. Matematički kongres ne prikazuje rješenje svakog zadatka. Umjesto toga, kongres fokusira raspravu cijelog razreda na nekoliko odabranih matematičkih rješenja s ciljem unapređenja učenja svakog učenika. Matematički kongres obično započinje izradom postera na kojima učenici u parovima prezentiraju svoja rješenja i kako su do njih došli. Zatim se učenici povezuju u grupe (mini-kongres) kako bi raspravili ideje

⁵ Ured za čitalačku i matematičku pismenost (*prev. S. M. H.*).

prezentirane na posterima. Na kraju cijeli razred sudjeluje na kongresu, odnosno, raspravi o rješenjima koja prezentira nekoliko odabranih parova. Vodeći raspravu na kongresu učitelj potiče učenike na usporedbu i učinkovitost prezentiranih rješenja.

Zapisivanje na ploči (Bansho) ima za cilj organizirati i prezentirati matematička razmišljanja učenika na ploči ili panou. To uključuje upotrebu matematičkih izraza, slika i dijagrama učeničkih rješenja i strategija rješavanja problemskih zadataka. Pisani zapis omogućuje simultanu usporedbu različitih rješenja te potiče učenike na stvaranje novih matematičkih ideja i produbljivanje matematičkog razumijevanja. Budući da se zapisivanje na ploči odvija tijekom cijele lekcije, učenici i učitelj imaju cjelovit pogled na matematičku raspravu koja se odvijala za vrijeme nastave. Također, ova tehnika njeguje vještinu vođenja bilješki kod učenika. Važno je da učitelji zadrže sve što je napisano na ploči tijekom lekcije bez brisanja.

Kako bi se ostvarila kvalitetna matematička rasprava Nacionalno vijeće učitelja matematike (2014) predlaže smjernice za učitelje i učenike koje su navedene u tablici 2.

Tablica 2. Smjernice Nacionalnog vijeća učitelja matematike (2014) za ostvarivanje kvalitetne matematičke rasprave

Učitelji	Učenici
<ul style="list-style-type: none"> a) uključuju učenike u svrhovito dijeljenje matematičkih ideja, obrazloženja i pristupa korištenjem raznolikih prikaza b) izabiru i raspoređuju učeničke pristupe i strategije rješavanja problema za analizu i raspravu cijelog razreda c) olakšavaju raspravu učenicima postavljajući ih u ulogu autora koji objašnjavaju i brane svoje ideje d) osiguravaju napredak prema matematičkim ciljevima eksplicitno ih povezujući s učeničkim pristupima i obrazloženjima 	<ul style="list-style-type: none"> a) prezentiraju i objašnjavaju ideje u paru, malim grupama i pred cijelim razredom za vrijeme rasprave b) pažljivo slušaju i kritički propituju objašnjenja svojih vršnjaka koristeći primjere kako bi prihvatili ili odbili njihove argumente c) identificiraju različite pristupe rješavanja problema koji mogu istovremeno biti slični i različiti

3.1.6. *Korištenje tehnologije*

Prema Loong i Herbert (2018, str. 475) digitalne tehnologije definirane su kao „elektronički alati, sustavi, uređaji i resursi koji generiraju, pohranjuju ili obrađuju podatke“. Tu pripadaju društveni mediji, *online* igre i aplikacije, multimedija, aplikacije za produktivnost, računalstvo u oblaku, interoperabilni sustavi i mobilni uređaji. Isti autori definiraju informacijsku i komunikacijsku tehnologiju kao onu koja pruža pristup do informacija putem telekomunikacija. Smiljčić i sur. (2017) navode da „IKT⁶ podrazumijeva sva tehnička sredstva koja se upotrebljavaju u svrhu rukovanja informacijama. IKT se sastoji od informacijske tehnologije, telefonije, elektroničkih medija, svih tipova obrade i prijenosa audio i video signala te svih funkcija nadgledanja i kontrole, baziranih na mrežnim topologijama. Informacijska i komunikacijska tehnologija predstavlja, zapravo, djelatnost koja čini tehničku osnovu za sustavno prikupljanje, pohranu, obradu, širenje i razmjenu informacija različitih oblika (znakova, slike, teksta, zvuka)“ (Smiljčić i sur., 2017, str. 158).

Cullen i sur. (2020) smatraju da korištenje tehnologije može poboljšati nastavu i učenje matematike, a dovodi i do stjecanja digitalnih kompetencija kao i postignuća i samoefikasnosti učenika. Ipak, tehnologiju u obrazovanju treba koristiti na odgovarajući način, a ključnu ulogu u tome imaju učitelji koji učenike trebaju o njezinu načinu korištenja i poučiti. Učenici trebaju naučiti kako se služiti tehnologijom, ali zadržavajući fokus na ciljevima učenja matematike.

Organizacija Nacionalnog vijeća učitelja matematike (2014) ističe da upotreba tehnologije u nastavi i učenju matematike podrazumijeva upotrebu digitalnih alata od strane učitelja i učenika na promišljeno osmišljene načine i u određeno vrijeme tako da mogućnosti tehnologije poboljšavaju načine na koje učenici uče, doživljavaju, komuniciraju i bave se matematikom. Tehnologija se mora koristiti prije svega kao podrška učenicima u učenju matematičkih pojmova, odnosa i postupaka. Odgovarajuća uporaba tehnologije može poboljšati razumijevanje matematičkih pojmova, pomaže u razvoju dubokog razumijevanja matematičkih pojmova i procedura te omogućuje učenicima da se više usredotoče na konceptualno znanje i rješavanje problema. Nacionalno vijeće učitelja matematike (2014) također ističe da nastava matematike treba integrirati tehnologiju kao bitan resurs koji može pomoći učenicima da razumiju i nauče matematičke pojmove te da zaključuju i razviju matematičku komunikaciju s drugim učenicima. Matematička tehnologija bez obzira na to radilo se o grafičkim kalkulatorima, aplikacijama na računalu ili tabletu, web stranici, pruža učenicima interaktivno

⁶ ICT – Information and communications technology – informacijska i komunikacijska tehnologija.

okruženje. U tom okruženju oni mogu ispitati, vizualizirati matematičke prikaze i povezati simboličke izraze i numeričke podatke. Korištenje je tehnologije u nastavi matematike korisno, ali ne jamči duboko razumijevanje matematičkih sadržaja. Osim toga, tehnologija ne može zamijeniti učinkovitog učitelja koji treba animirati učenike pri rješavanju matematičkih zadataka te razvijanju dubokog razumijevanja matematičkih pojmova. Dakle, tehnologija u nastavi matematike ima smisla samo ako se koristi na odgovarajući način podržavajući i učinkovito poučavanje i aktivno učenje.

Glasnović Gracin (2008) ističe kako se informacijska i komunikacijska tehnologija u nastavi matematike može koristiti za:

- 1) različite oblike prikazivanja matematičkih sadržaja
- 2) eksperimentiranje, odnosno mogućnost učeničkog samostalnog istraživanja, spoznavanja i rješavanja problema
- 3) pojednostavljenje matematičkih postupaka (tj. upotreba računala omogućuje korištenje elementarnih metoda koje su bile napuštene zbog zahtjevnog računanja)
- 4) modularnost, odnosno sposobnost brzog dolaženja do rješenja problema zanemarujući korake u postupku (Glasnović Gracin, 2008, str. 12).

Ozbiljan problem koji se javlja pri savladavanju matematičkih sadržaja jest kako ih na zanimljiv način prezentirati. Učenike je potrebno motivirati kako bi matematiku sagledali na drugačiji način. To je moguće učiniti prezentiranjem matematičkih sadržaja na drugačiji način uporabom tehnologije. Kostić Kovačević i sur. (2014) ističu da se računalo u nastavi matematike može koristiti u svim ili nekim etapama nastave. To treba doprinijeti nastavi u kojoj učitelj neće biti jedini izvor informacija, već može pomoći učenicima u aktivnom sudjelovanju u nastavi.

Sivakova i sur. (2017) smatraju da je dostupnost IKT-a promijenila prirodu poučavanja i učenja nastave matematike. IKT u nastavi matematike uključuje uporabu kalkulatora, računala, izradu grafikona i geometrijskih oblika. Također ističu pet mogućnosti korištenja IKT-a u nastavi matematike:

1. *davanje povratnih informacija* – računala često učenicima daju brzu, pouzdanu i potpunu povratnu informaciju i ohrabruje ih na testiranje svojih ideja
2. *promatranje obrazaca i uočavanje veza* – računala i kalkulatori potiču učenike na istraživanje većeg broja matematičkih problema pri čemu im računalo omogućuje stvaranje formula koje se lako povezuju

3. *istraživanje podataka* – omogućuju učenicima rad sa stvarnim podacima koji se mogu predstaviti, analizirati i tumačiti na različite načine
4. *programiranjem* se postiže da učenici zadaju određene naredbe kako bi postigli odgovarajući rezultat
5. *razvijanje imaginarnih slika* potiče učenike da predviđaju rezultate dok generiraju vlastite mentalne slike.

Brown i sur. (2004) smatraju da uporaba IKT-a u nastavi matematike omogućuje kontekst koji doprinosi učenju. Ključno je pitanje kako integrirati odgovarajuće IKT alate u nastavu. Sinay i Nahornick (2016) ističu različite primjere korištenja tehnologije u nastavi matematike koji uključuju: mrežne alate za procjenu, mrežne alate za suradnju, računalne algebarske sustave, aplikacije, kalkulatori, računalne aplikacije i interaktivne ploče. Rittle-Johnson i Jordan (2016) smatraju da su internetske procjene jedan od pristupa koji mogu biti korisni u poučavanju i učenju matematike. Kalkulatori su sredstvo koje može pomoći u oslobađanju učenika od elementarnog računanja i usmjeravanje na rješavanje matematičkih problema. Interaktivne ploče povećavaju angažman učenika i poboljšavaju matematičke rasprave.

Međutim, učitelji i dalje moraju biti usredotočeni na učinkovite nastavne strategije koje uglavnom ne zahtijevaju korištenje tehnologije. Spangler i Wanko (2017) tumače da upotreba tehnologije ne može zamijeniti učeničko mišljenje. Ako se matematika promatra samo kao računanje, tada tehnologija može zamijeniti velik dio učenikova mišljenja. Međutim, ako se na matematiku gleda kao na stvaranje, komunikaciju i rješavanje problema za koje još nije zadano rješenje, formula ili algoritam, tada tehnologija ne može biti adekvatna zamjena.

3.1.7. Suradničko učenje

Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da učitelj treba poticati suradnju među učenicima. Bognar (2006) ističe da se suradničko učenje odvija u grupama i svi članovi grupe sudjeluju u ostvarenju zajedničkog zadatka. Pri tome se javlja pozitivna međuovisnost i individualna odgovornost svih članova. Suradničko učenje primjer je nastavne aktivnosti koja se može koristiti za poticanje aktivnog učenja, a ono je važna dimenzija kvalitetne nastave matematike. Učinkoviti učitelji koriste učenje u malim grupama kako bi učenici mogli razgovarati o važnim idejama. To ima pozitivan učinak na učenje, socijalne vještine i samopoštovanje. Johnson i Johnson (1990) smatraju da učitelji matematike trebaju koristiti suradničko učenje kako bi učenici surađivali na postizanju zajedničkih ciljeva. U situacijama suradničkog učenja učenici

shvaćaju da mogu postići ciljeve učenja ako i ostali učenici iz grupe dostignu svoje ciljeve. U suradničkom učenju učenici s drugim učenicima razgovaraju o matematičkim sadržajima, potiču jedni druge na rješavanje zadataka i pružaju si međusobnu pomoć.

Retnowati i sur. (2018) ističu da učenici mogu primati znanje od ostalih članova grupe, reorganizirati ga te povezivati novo znanje s predznanjem pohranjenim u dugoročnu memoriju. Suradničko učenje može imati prednost u odnosu na individualno učenje jer uključuje međusobnu razmjenu informacija i učenja kao i u svakodnevnom životu. Još je jedna prednost suradničkog učenja ta što može pomoći u učenju složenih sadržaja. Komplicirane i složene sadržaje teško je naučiti jer nameću veliko opterećenje radne memorije. Međutim, ako se sadržaji koje učenici trebaju naučiti dijeli s nekoliko članova grupe, pojedinac ne mora ulagati toliko napor tijekom obrađivanja informacija relevantnih za zadatke, čime se potencijalno smanjuje opterećenje radne memorije. Kombinirajući ograničene izvore radne memorije nekoliko pojedinaca trebalo bi povećati izvore dostupne svima. Resursi za učenje tada se mogu rasporediti kao i obrada relevantnih podataka između članova grupe.

Brüning i Saum (2008) ističu kako suradničko učenje znači da učenici zajedno uče, ali svatko mora učiti i sam. Dakle, suradničko učenje ne može zamijeniti individualno učenje, a isto tako ni frontalni oblik koji ima svoje mjesto u nastavi matematike.

Ramani i Eason (2015) predlažu uvođenje igre u suradničke aktivnosti učenika mlađe školske dobi kako bi im nastava matematike bila zabavnija. Ono što se događa na satu matematike, ne mora ostati na satu matematike. Igre i zadatke potrebno je vezati uz druge teme u nastavnom programu i u stvarnom svijetu. Vršnjaci su vrijedan resurs znanja. Osim toga, suradničke matematičke aktivnosti pomažu učenicima u razvijanju socijalnih i emocionalnih vještina.

Johnson i Johnson (1990) navode šest razloga primjenjivanja suradničkog učenja u nastavi matematike:

- 1) Suradnja doprinosi većim matematičkim postignućima učenika nego natjecanje i individualno učenje te promiče korištenje visokokvalitetnih strategija zaključivanja, generiranja novih ideja i prijenosa matematičkih znanja.
- 2) Suradnja omogućava aktivno sudjelovanje učenika i na taj način potiče učenje matematičkih pojmova i vještina.
- 3) Suradnja omogućuje objašnjavanje strategija rješavanja problema ostalim članovima grupe. Ona često rezultira zaključivanjem na višoj razini i uključivanjem

metakognitivnih strategija. Doprinosi izražavanju svojih misli i razgovaranju o alternativnim strategijama.

- 4) Doprinosi stvaranju suradnički strukturiranih grupa.
- 5) Suradničkim učenjem učenici stječu povjerenje u svoje individualne matematičke sposobnosti, dobivaju poticaj, podršku i uvažavanje od svojih vršnjaka.
- 6) Izbor načina sudjelovanja u suradničkim oblicima učenja pod utjecajem je vršnjaka.

Nakon postavljenih ciljeva potrebno je donijeti i ključne odluke koje su preduvjet za uspješno planiranje suradničkog učenja u nastavi matematike: određivanje veličine grupe, određivanje karakteristika grupe, vrijeme trajanja rada na zadacima, dodjela uloga članovima grupe. Učenje u grupama uključuje pozitivnu međuovisnost, interakciju među učenicima, podjelu odgovornosti i korištenje socijalnih vještina.

Brüning i Saum (2008) iznose pet najvažnijih preduvjeta uspješnog suradničkog učenja:

1. *Socijalne vještine* – preduvjet su i cilj suradničkog učenja; one uključuju komunikacijske vještine, povjerenje, individualnu odgovornost svakog člana grupe, vještinu zajedničkog odlučivanja te vještinu samostalnog rješavanja sukoba
2. *Učenje u malim grupama* – ako u grupama nije više od četiri člana tek tada učenici mogu učiti jedni blizu drugih i tiho razgovarati
3. *Pozitivna uzajamna ovisnost* – svi članovi trebaju biti odgovorni za zajednički uspjeh grupe
4. *Individualna odgovornost* – svaki član grupe treba obaviti svoj dio zadatka i moći demonstrirati grupne rezultate kao i vlastiti napredak
5. *Promišljanje procesa suradničkog učenja* – potrebno je razmišljati o zajedničkom procesu suradničkog učenja jer će se na taj način suradničko učenje stalno poboljšavati.

Slavin (2006) predlaže sljedeće metode za ostvarivanje suradničkog učenja koje se mogu koristiti u nastavi matematike:

Učenički timovi podijeljeni prema postignućima (STAD – Student Teams-Achievement Divisions). U toj metodi učitelj prvo održi izlaganje. Zatim učenici podijeljeni u četveročlane grupe nastoje osigurati da svi članovi savladavaju nastavne sadržaje. Na kraju, svi učenici provjeravaju svoje znanje individualnim rješavanjem kviza. Rezultati učenika u kvizu uspoređuju se s njihovim prijašnjim prosjecima, pri čemu učenici nastoje premašiti svoju vlastitu izvedbu. Ti se bodovi zbrajaju kako bi se dobili timski rezultati, a timovi certifikate ili druge nagrade. Učinkovitost ove metode pokazuju i rezultati istraživanja koje su proveli

Maelasari i Wahyudin (2017) iz sadržaja geometrije u petom razredu osnovne škole. Na temelju rezultata obrade i analize podataka utvrđeno je povećanje matematičkih postignuća i komunikacijskih vještina učenika koji su učili pomoću suradničke metode STAD za razliku od učenika koji su učili uz metodu izravnog poučavanja.

Slagalica (Jigsaw) – metoda suradničkog učenja u kojoj su učenici podijeljeni u timove od šest članova. Zadatak im je naučiti nastavne sadržaje podijeljene u manje cjeline. Nakon toga članovi različitih timova koji su proučavali isti odjeljak okupljaju se u stručnim skupinama kako bi razgovarali o svojim dijelovima. Zatim se vraćaju u matične grupe i naizmjenice prezentiraju ono što su naučili u ekspertnim grupama (Slavin, 2005). Prema Aronsonu (2018) svaki učenik mora naučiti vlastiti dio i prezentirati ga ostalim članovima grupe, koji nemaju nikakav drugi pristup tom materijalu. Dakle, u metodi slagalice učenici ovise jedni o drugima. Uspoređujući se s učenicima u tradicionalnim učionicama, učenici u ovoj metodi ostvarili su bolje rezultate na ispitima, imali su manje predrasuda jedni prema drugima, postigli su veće samopoštovanje i nastava im se više sviđala od učenika koji su pohađali tradicionalnu nastavu. Na Hattiejevoj listi učinaka koja sadrži 252 čimbenika metoda je slagalice vrlo visoko rangirana s efektom učinka od 1,2 (<https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement>).

U *zajedničkom učenju* učenici rješavaju zadatak u heterogenim skupinama od četiri do šest članova. Svi članovi sudjeluju, a uspjeh ovisi o postignuću grupe. Ova metoda naglašava formiranje tima prije nego što učenici počnu surađivati te uključuje redovite rasprave unutar grupa o tome koliko dobro uče zajedno.

Grupno istraživanje uključuje manje timove od dva do šest učenika koji biraju podtemu unutar veće nastavne cjeline. Dakle, u ovoj metodi učenici imaju slobodu odabrati teme koje ih zanimaju i koje su prikladne za raspravu, istraživanje ili planiranje projekta. Članovi svake grupe na kraju prezentiraju ono što su naučili pred ostalim učenicima.

U *suradničkom sažimanju* učenici podijeljeni u parove naizmjenice sažimaju dijelove sadržaja koji su pročitali ili čuli na nastavi. Dok jedan učenik sažima, drugi sluša i ispravlja pogreške ili propuste. Nakon toga mijenjaju uloge, nastavljajući to činiti sve dok ne obuhvate sve što treba naučiti. Učenici koji uče na ovaj način usvajaju nastavne sadržaje više od onih koji sami sažimaju tekstove ili koji jednostavno čitaju zadani tekst (Slavin, 2005).

3.1.8. Povratne informacije

Wiggins (2012) smatra da se pojam povratne informacije često koristi za opisivanje svih vrsta komentara danih nakon određene aktivnosti uključujući savjete, pohvale i ocjenjivanje. „Povratne informacije su informacije o tome kako nešto činimo u nastojanju da postignemo cilj“ (Wiggins, 2012, str. 12). Marzano (2003) ističe povratne informacije kao najjednostavniji recept za unapređenje nastave. Na Hattiejevoj listi povratna informacija s efektom učinka od 0,7 zauzima visoko mjesto (<https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement>). Dakle, povratne informacije učinkovit su način utjecaja na postignuća učenika. Prema Hattiju i Timperley (2007) povratna informacija odnosi se na različite aspekte nečije izvedbe ili razumijevanja, a može biti dobivena od strane učitelja, učenika, roditelja, obrazovnog medija (npr. računalnog programa) ili samoga sebe.

Prema Scherer (2016) povratna informacija sadrži tri različite komponente od kojih je prva usmjerna prema cilju (*feed up*), druga prema izvedbi (*feed back*), a treća prema predstojećim aktivnostima učenja (*feed forward*). Kako bi u potpunosti implementirali povratne informacije učitelji trebaju koristiti sva tri aspekta.

Prva komponenta uključuje razumijevanje ciljeva učenja. Kada učenici shvate cilj veća je vjerojatnost da će se usredotočiti na zadaće učenja. Učitelji u skladu s ciljevima mogu procijeniti uspješnost učeničkog učenja i dati im povratnu informaciju što podrazumijeva drugu komponentu, odnosno učiteljev odgovor na rezultate učenja. Učitelji pružaju učenicima informacije o napretku ili nedostacima u ostvarivanju cilja te im predlažu što da poduzmu kako bi se približili očekivanom standardu. Treća komponenta odnosi se na planiranje narednog učenja. To predstavlja formativni aspekt povratnih informacija. U ovoj komponenti koriste se prethodno dobivene informacije kako bi se mogle planirati naredne nastavne aktivnosti. To podrazumijeva veću fleksibilnost u planiranju nastave (Scherer, 2016).

Frey i Fisher (2011) osim prethodno navedene tri razine ističu važnost provjere što učenici znaju prije nego su započeli s učenjem. Iako je svaka vrsta povratnih informacija dragocjena, povratne informacije moraju biti u skladu s postavljenim ciljevima.

Hattie (2012) razlikuje četiri razine povratnih informacija: (1) povratne informacije o zadatku (npr. povratne informacije o tome jesu li odgovori bili ispravni ili pogrešni), (2) povratne informacije o postupku rješavanja zadatka (npr. povratne informacije o korištenim strategijama ili strategijama koje bi se mogle koristiti), (3) povratne informacije o samoregulaciji (npr. povratne informacije o praćenju svog napretka i regulaciji učenja

usmjerenog na ostvarivanje postavljenih ciljeva) i (4) povratne informacije o učeniku kao osobi. Hattie i Timperley (2007) ističu važnost prve tri razine, dok za povratne informacije usmjerene na osobnost učenika koje su najčešće dane u obliku pohvala smatraju da nemaju većeg učinka na rezultate učenja. Razlog je tome što pohvale rijetko pružaju odgovore na tri ključna pitanja: „Kamo idem?“, „Kako napredujem?“ i „Što mogu učiniti sljedeće?“. Osim toga, one odvrću pozornost od zadatka usmjeravajući se na značajke osobnosti što učenicima rijetko pomaže u učenju. Frey i Fisher (2011) smatraju kako ova vrsta povratnih informacija možda neće biti učinkovita sama po sebi, ali može biti učinkovita kada uzrokuje promjenu u naporu, interesima, angažmanu ili djelotvornosti učenika.

Dajući povratne informacije o zadatku, učitelji često prepoznaju ispravne i netočne odgovore, zahtijevaju dodatne ili drugačije informacije i usmjeravaju pozornost na specifična znanja. Ova se razina povratnih informacija često naziva korektivna povratna informacija jer je namijenjena rješavanju ili ispravljanju pogrešaka. Ellis (2009, prema Frey i Fisher, 2011) identificira nekoliko vrsta korektivnih povratnih informacija:

- a) izravna korektivna povratna informacija pri čemu učitelj učeniku daje točne odgovore
- b) neizravna korektivna povratna informacija u kojoj učitelj utvrđuje pogrešku, ali ne daje točan odgovor te može ili ne mora naznačiti mjesto pogreške
- c) metalingvistička korektivna povratna informacija u kojoj učitelj daje naslutiti vrste pogrešaka koje učenik treba ispraviti.

Frey i Fisher (2011) smatraju da su korektivne povratne informacije najčešća vrsta povratnih informacija koje učitelji daju učenicima i najkorisnije su kada se koriste za uklanjanje pogrešaka. Međutim, potrebno je voditi računa i o povratnim informacijama o postupku koje se usredotočuju na procese koje učenik koristi rješavajući zadatak te o povratnim informacijama koje se odnose na samoprocjenu i samoregulaciju učenja. Učenici moraju naučiti procjenjivati svoje sposobnosti, znanje, kognitivne strategije i postignuća. Pritom moraju regulirati svoje ponašanje i aktivnosti usmjerene prema postavljenom cilju. Posljednja razina povratnih informacija usredotočuje se na samog učenika.

Povratna informacija u obrazovnom procesu treba pomoći učeniku kako bi nešto naučio, uradio bolje, ali i da bude svjestan odgovornosti za svoj uspjeh. Ona ne treba predstavljati kritiku, ni pohvalu, već obuhvaćati set informacija koje će pomoći učeniku da njeguje ono što je dobro, uputiti ga kako popraviti greške i dalje se razvijati. Tako učenik postaje svjestan svojih postignuća i ostvarenosti ishoda učenja, što mu u velikoj mjeri omogućava planiranje daljnjeg

razvoja što je osnovni cilj svakog procesa učenja. S druge strane i učitelj ima jasniji uvid kako napreduju učenici i na koji način treba prilagoditi proces poučavanja.

Marzano (2003) ističe kako su povratne informacije općenito učinkovite. Učitelj ih nikada ne može dati previše. Kako bi one bile učinkovitije, učitelji trebaju:

- provjeriti jesu li povratne informacije korektivne, trebaju obavijestiti učenike na kojoj su razini u odnosu na određene razine znanja
- povratne informacije trebaju biti pravovremene i konkretne
- potrebno je potaknuti učenike da sami sudjeluju u davanju povratnih informacija.

Scherer (2016) navodi sedam značajki kvalitetnih povratnih informacija:

1. *Opipljivost i transparentnost.* Povratne informacije nisu samo usmjerene na jasan cilj već pružaju vidljive rezultate koji se odnose na cilj.
2. *Djelotvornost.* Učitelji trebaju učenicima pružiti povratnu informaciju o tome što je bilo dobro jednako kao i povratne informacije o tome u čemu nisu bili uspješni.
3. *Prijateljski usmjerena.* Povratna informacija treba biti razumljiva i prilagođena učeniku kako bi ju mogao razumjeti.
4. *Pravovremenost.* Povratnu informaciju potrebno je dati što prije to bolje.
5. *Kontinuiranost.* Učenicima je potrebno davati što više povratnih informacija tijekom rješavanja zadataka kako bi postigli što bolji rezultat.
6. *Dosljednost.* Učitelji trebaju biti dosljedni i formalizirati svoje prosudbe opisujući napredak učenika.
7. *Utvrđivanje napretka prema dugoročnom cilju.* Praćenje napretka podrazumijeva prilagođavanje ritma učenja u svjetlu stalnih povratnih informacija prema konkretnom dugoročnom cilju.

Wiggins (2004, prema Penca Palčić, 2008) navodi osam koraka u davanju kvalitetne povratne informacije:

1. „Identificiranje predviđenog postignuća.
2. Određivanje kriterija svakog postignuća. U slučaju bilo koje dvojbe o tome shvaćaju li učenici ili ne zašto je potrebno postići određeno znanje i standarde. To im je potrebno obrazložiti.
3. Opis postupka ocjenjivanja i uzroka ocjenjivanja.
4. Odrediti standarde prije ocjenjivanja.

5. Identificiranje uzornih primjera i prezentacija izvora koje učenici mogu upotrijebiti da i sami postignu uradak koji će biti uzoran.
6. Posredovanje česte i jasne povratne informacije vezane uz standard. Posljedice dobro i loše obavljenog rada moraju biti jasno podastrte.
7. Posredovanje povratnih informacija u tolikom broju koliko je potrebno da učenici unaprijede svoj rad.
8. Traženje različitih uzroka za lošije znanje i aktivnosti za unaprjeđenje znanja“ (Penca Palčić, 2008, str. 144).

Tome možemo pridodati sljedećih pet sugestija za davanje učinkovitih povratnih informacija:

1. učinkovite povratne informacije usmjeravaju pozornost na planirano učenje ukazujući na ono što će voditi poboljšanju postignuća
2. učinkovita povratna informacija treba se primiti za vrijeme učenja dok se još može djelovati na poboljšanje učenja
3. učinkovite povratne informacije omogućavaju djelomično razumijevanje
4. učinkovita povratna informacija ne razmišlja umjesto učenika
5. učinkovita korektivna povratna informacija ukazuje na dijelove koje učenik može ispraviti (Scherer, 2016).

Prema Frey i Fisher (2011) formativno vrednovanje pomaže učiteljima u odluci što će se dalje poučavati. Pružaju učenicima informacije o tome što razumiju i što još trebaju naučiti. Marzano (2003) ističe kako se pravovremene povratne informacije koje se daju tijekom učenja nazivaju formativnim vrednovanjem nasuprot sumativnom vrednovanju koje se ostvaruje na kraju učenja. Nadalje, ističe kako prikladno i sustavno korištenje formativnog vrednovanja može drastično poboljšati postignuća učenika.

Frey i Fisher (2011) predlažu sljedeće metodičke pristupe koji se mogu rabiti za davanje povratnih informacija:

Prepričavanje omogućuje učenicima usmeno sažimanje onoga što razumiju u vezi s nastavnim sadržajem. Prepričavanje zahtijeva od učenika obrađivanje informacija i potiče ih na razmišljanje o slijedu ideja i događaja te njihovoj relativnoj važnosti. Pozivanje učenika na prepričavanje onoga što su upravo naučili moćan je način provjere njihova razumijevanja. Zapravo, prepričavanje može biti učinkovitije u provjeri razumijevanja od ispitivanja.

Razmisli-upari-podijeli strategija je rasprave koja omogućuje učenicima da razgovaraju o svojim razmišljanjima s vršnjacima prije nego što svoje ideje podijele s cijelim razredom. Strategija uključuje tri faze:

1. *Razmislite.* Učitelj potiče učenika na razmišljanje pitanjem, čitanjem, vizualno ili promatranjem. Učenici uzimaju nekoliko trenutaka (ne minuta) kako bi razmislili o pitanju.
2. *Uparite.* Nakon što su im dodijeljeni partneri, učenici uspoređuju svoje misli i identificiraju odgovore za postupke za koje misle da su najbolji, najintragantniji, najuvjerljiviji ili najkreativniji.
3. *Podijelite.* Nakon razgovora u parovima učitelj traži od učenika da podijele svoja mišljenja s ostatkom razreda. Ova aktivnost nudi izvrsne mogućnosti provjere razumijevanja. Učitelj može slušati kako parovi učenika raspravljaju o svojim odgovorima i bilježiti njihove odgovore.

Pisanje kao provjera razumijevanja. Pisanje je složen kognitivni proces koji uključuje razmišljanje. Kao takvo, pisanje pruža zanimljiv uvid u to kako učenici razmišljaju. Ipak, pisanje je više od razmišljanja. Nije jednostavno nešto reći i napisati što se misli. Umjesto toga, potrebno je razmišljati za vrijeme pisanja. Potrebno je pojasniti svoje razumijevanje za vrijeme pisanja. Napisano može poslužiti za provjeru razumijevanja jer učitelji mogu vidjeti kako učenici razmišljaju, a učenici mogu razjasniti svoje razumijevanje.

Pisanje sažetka. Pisanje sažetka omogućava provjeru razumijevanja jer pruža učitelju uvid u učenikovo sažimanje informacija. Sažimanje je slično prepričavanju jer učenicima služi kao način demonstriranja svojih sposobnosti i sinteze onoga što su pročitali, pogledali ili učinili. Najčešći je oblik sažetka kratki članak koji sadrži glavne ideje ili koncepte teme. Naglasak je na točnom prikazu pročitanih ili opaženih pojava.

Korištenje projekata i nastupa. Projekti i nastupi osmišljeni su kako bi učenicima dali priliku da sintetiziraju ono što su učili nastojeći stvoriti nešto novo. Munjiza i sur. (2007, str. 37) ističu kako „suvremena projektna nastava predstavlja jedan od mogućih vidova aktivnoga učenja koji se ostvaruje kroz različite vrste projekata“. Karakteristike su suvremene projektne metode sljedeće: uvažava individualne razlike i sposobnosti učenika, rad je individualiziran po svim odrednicama, izvorima znanja, opsegu, dubini, brzini napredovanja te brzini u različitim područjima. Napušta se predmetno-satni sustav, problemi se rješavaju interdisciplinarno na principima znanstvene metodologije u različitim koncepcijama koncentrirane nastave. U istraživačkim projektima savladava se tehnika intelektualnog rada, socijalizacija se postiže uz

suradničko učenje (Munjiza i sur., 2007). Za praćenje projekata moguće je koristiti kontrolne liste. Kontrolne liste služe kao sredstvo za usmjeravanje učenika, a također omogućuju interakciju nastavnika i učenika tijekom projekta.

Kratki kvizovi i testovi mogu biti korisni za provjeru znanja, ali to ne znači automatski da su korisni za promicanje učenja. Kviz ili test trebaju biti informativni za učenika, moraju sadržavati korektivne informacije.

3.2. Modeli kvalitetne nastave matematike

Ovo poglavlje donosi opise singapurskog i Montessori modela nastave matematike. U singapurskom modelu nastave matematike učenici su usmjereni na povezivanje matematičkih sadržaja i rješavanje matematičkih problema, dok je Montessori model primjereniji za učenike s lošijim rezultatima iz nastave matematike. Oba modela pomažu učenicima učenje matematike na smislen, privlačan, zabavan i interaktivan način. Behar-Horenstein i Seabert (2005) smatraju da učenici pokazuju poboljšanje u postignućima ako učitelji koriste razne nastavne pristupe. Zbog toga smatramo da oba modela imaju svoje mjesto u početnoj nastavi matematike.

Prema Matijeviću (2000, str. 61) pod modelom se „misi znanstveno uopćavanje na temelju proučavanja općih i zajedničkih obilježja didaktičkih rješenja za nastavu“. National Child Welfare Resource Center for Organizational Improvement (2008) definira model kao jasno opisane aktivnosti i objašnjenje razloga njihove provedbe u praksi. Joyce i Weil (2003) ističu kako model opisuje okruženje u kojemu se odvija učenje. To uključuje kurikulume, nastavne materijale i pripreve. Behar-Horenstein i Seabert (2005) ističu da su nastavni modeli konceptualni okviri koji služe učiteljima u nastojanju da pomognu učenicima naučiti kako učiti. Utemeljeni u određenim teorijskim polazištima modeli propisuju strategije koje pomažu učiteljima definirati svoju odgovornost tijekom planiranja, realizacije i evaluacije nastave.

Modeli su usko povezani s teorijama. U Hrvatskoj enciklopediji može se pronaći da teorija predstavlja „sustav znanja ili shvaćanja o nekoj pojavi ili skupini pojava, zasnovan na uočavanju njihove bitne zakonitosti; znanstveno uopćeno objašnjenje, interpretacija određenog iskustva iz jednoga principa; temeljni znanstveni pojmovi neke discipline“ (<https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=60872>). Za razliku od modela, teorija je skup analitičkih pristupa ili izjava koji su osmišljeni kako bi strukturirali naše razumijevanje i objašnjenje svijeta (Nilsen, 2015). Teorija objašnjava zašto određeni odnosi dovode do određenih događaja. Dok teorija daje detaljno objašnjenje određenog fenomena, model

predstavlja njegovo namjerno pojednostavljivanje. Ipak, modeli su povezani s teorijom i razlika između njih često nije jasna (Nilsen, 2015).

3.2.1. Nastava matematike prema načelima Montessori pedagogije

Marija Montessori u početnim se fazama svog istraživanja usmjerila na rad s predškolskom djecom, a tek kasnije svoj interes usmjerila je na djecu školske dobi (Röhrs, 1994). Montessori je istaknula ključnu važnost ranog odgoja i obrazovanja za kasniji uspjeh djeteta. Ona polazi od dvije pretpostavke: djeca imaju prirodene snage za samorazvoj i te se prirodene snage aktiviraju ako su djeca okružena povoljnom sredinom. Njezina odgojna metoda zasniva se na samoodgoju i samopoučavanju (Matijević, 2001).

U slučaju siromašne djece bilo je važno da doživljavaju kvalitetno obrazovanje koje bi im moglo pomoći prevladati socijalnu deprivaciju. Jedno od ključnih pedagoških načela u Montessori modelu bilo je da se dječje učenje najbolje ostvaruje u strukturiranom i uređenom okruženju. Ona je inzistirala da djeca i njihovi roditelji poštuju neke eksplicitne propise. Koliko god bili siromašni, od djece se očekivalo da dođu u školu čistog tijela i odjeće.

Kako bi se djeci pomoglo u razvoju tijekom osjetljivog razdoblja ranog razvoja, ponuđeni su im samoispravljujući didaktički materijali koje su sami mogli odabrati. Montessori je vješto prevladala problem motiviranja učenika za učenje s kojim su se učitelji susretali u tradicionalnim školama. Budući da su djeca odabrala svoje vlastite aktivnosti i materijale, bili su intrinzično motivirani. Svako dijete učilo je svojim tempom i zahtijevalo je manju intervenciju učitelja. Korištenje samoispravljujućih obrazovnih materijala temeljilo se na uvjerenju da će djeca steći samodisciplinu i samopouzdanje postajući svjesni vlastitih pogrešaka i ponavljajući određeni zadatak sve dok ga ne svladaju. Osmislila je kurikulum koji je nastojao razviti dječje kompetencije u nekoliko područja: praktične životne vještine, motorička i senzorna obuka, razvoj čitanja i pisanja te aritmetika (Gutek, 2005). „Montessori pedagogija stavlja naglasak na ‘normalno’ dijete i ideju da je sinonim za normalni razvoj kontinuirani povratak intrinzično motiviranim optimalnim iskustvima“ (Rathunde, 2001, prema Rajić, 2011. str. 244).

Montessori je ubrzo nakon diplome postala pomoćnica liječnicima u psihijatrijskoj bolnici. Tako je došla u doticaj s djecom u toj bolnici koja su bila klasificirana kao mentalno zaostala. Dirnuta žalosnim stanjem te djece čeznula je da im pomogne. Postalo je sve očiglednije da mentalni nedostatak nije bio samo medicinski problem, nego prije svega pedagoški. Smatrala

je da se uz poseban obrazovni tretman psihičko stanje te djece moglo poboljšati. Kada se osvrnula po sobi u kojoj su djeca boravila uočila je da nemaju igračke ili bilo koji materijal kojim bi se bavili. Nije bilo ničega što su djeca mogla držati ili manipulirati njime svojim prstima. Shvatila je da bi za tu djecu put prema razvoju inteligencije mogao biti kroz manipuliranje objektima (Standing, 1957). Montessori obrazovanje znatno se razlikovalo od tadašnjeg obrazovanja. U njezinom pedagoškom modelu dijete je postavljeno u fokus obrazovnog procesa, a učitelj je preuzeo ulogu redatelja koji nenametljivo vodi djetetovo vlastito učenje. Montessori je baveći se mentalnom retardacijom i drugim psihološkim poremećajima djece razvila dva pedagoška načela: prvo, da mentalni nedostatak djece zahtijeva posebnu vrstu obrazovanja, a ne samo liječenje. A drugo, da je ova posebna vrsta obrazovanja poboljšana upotrebom didaktičkih materijala.

Montessori pedagogija temelji se na pristupu učenju u kojem samostalnost i aktivnost učenika dolazi do izražaja. Poput Pestalozzija Montessori prepoznaje u djeci razvojne kvalitete specifične za čovjeka. Ističe važnost dizajniranja škole tako da promoviraju dječje interese, koncentraciju i psihološku kompleksnost. Rajić (2011) smatra važnom primjenu Montessori modela u odgoju i obrazovanju jer omogućava razvoj individualnih sposobnosti učenika i usklađuje njihove različite potencijale. Montessori model polazi od pretpostavke da učenici mogu samostalno učiti uz vođeno učenje pomoću specifičnih didaktičkih materijala koji odgovaraju dobi i sposobnostima djece. Prednost je u tome što se materijali čuvaju na policama i djeci su stalno dostupni (Faryadi, 2017). Philipps (1999, str. 11) ističe kako se „Montessori pedagogija temelji na znanstvenom promatranju spontanog učenja djece, na poticanju vlastitog djelovanja djeteta i njegove samostalnosti i na poštivanju djetetove osobnosti“.

Medeiros Neta i Gutierre (2020) naovode da je Montessori model znanstveno utemeljen jer se temelji na znanstvenim informacijama o razvoju djeteta. Prema Isaacs (2015) Montessori model pridonosi dječjem razvoju u fazama. U svakoj fazi doprinosi razvoju djetetovih specifičnih sposobnosti i to okolinom te podrškom odraslih i vršnjaka. „Kao dio prepoznavanja uloge pojedinca u životu čovječanstva, Montessori je naglasila važnost razumijevanja djece osnovnoškolske dobi, uvidjevši da kvaliteta njihova života ovisi o nasljeđu prethodnih generacija“ (Lillard i Jessen, 2022). Philipps (1999) smatra da su najvažnija načela Montessori odgoja i obrazovanja: sloboda, upijajući um, polarizacija pažnje, pripremljena okolina, prostor, didaktički pribor i Montessori odgojitelj ili učitelj.

Sloboda djece ima granice, odnosno, omeđena je zajedništvom. „Ona ne znači da svatko čini ono što hoće, nego da je sam sebi gospodar“ (Philipps, 1999, str. 43). Montessori odgojem

nastoji se pomoći djetetu da njegova spontanost dođe do izražaja. Odgojem dijete činimo slobodnim upoznajući ga sa svojstvima okoline. Matijević (2001) tumači da Montessori sustav polazi od ideje slobode i slobodnog odgoja. Slobodni su i dijete i učitelj. Dijete slobodno bira redoslijed i trajanje aktivnosti. Učitelj je slobodan u ostvarivanju kurikuluma. Montessori model je poseban jer potiče dijete da samostalno generira svoj razvoj, a sloboda je jedna od važnijih promjena koju uvodi Montessori pedagogija.

Upijajući um značajan je za radoblje od treće do šeste godine. Dijete razlikuje iskustva, svjesno je, a odrasli preko jezika dopiru do djetetova uma. Upijajući um priprema dijete za kasnije učenje u školi i stvara unutrašnju umnu i duševnu izgradnju (Phillipps, 1999). Sposobnost upijanja iz okoliša, kao što spužva upija vlagu iz svog okoliša, fenomen je koji traje do šeste godine života. „Kao i razdoblja senzibiliteta, upijajući um nakon toga nestane, a njegovo mjesto zauzima nova metoda učenja“ (Lillard i Jessen, 2022, str. 7).

Polarizacija pažnje je koncentriranost djeteta. Dijete koje koncentrirano uči udaljeno je od svijeta, ništa ga ne može ometi. „Kad okončava svoju djelatnost to čini zbog unutrašnjih pobuda, izgleda odmorno, radosno“ (Phillipps, 1999). Kod male djece koncentracija je uvijek vezana za vanjski predmet. Tražeći najpovoljnije uvjete za pojavu fenomena usmjeravanja pozornosti Montessori razvija odgovarajuću pripremljenu okolinu, određuje način ponašanja odgojitelja i tehniku indirektnog uplitanja. Montessori usmjeravanje koncentracije potiče se u tri faze: fazi pripreme, fazi pravog rada i fazi smirivanja i okončavanja aktivnosti (Phillipps, 1999).

Pripremljena okolina nudi sve što dijete treba za tjelesnu, umnu, duševnu prilagodbu. Uređena je tako da ispunjava stvarne i trenutačne potrebe djeteta i omogućava mu rast njegove ličnosti. Nadalje, Matijević (2001) tumači da je za odgovarajući razvoj djeteta potrebno osigurati poticajnu sredinu. Ta sredina (okoliš) sadrži materijal primjeren različitim stupnjevima unutrašnjeg strukturalnog plana razvoja djeteta.

Prostor se u Montessori ustanovama uređuje prema estetskim kriterijima. Odnosno prema stvarnim slikama prirodnih ljepota, slikama iz života (Phillipps, 1999), a stolovi i stolice slobodno su raspoređene u skupinama ili pojedinačno (Matijević, 2001). Učionica je posebno uređena sredina za boravak djece i učenje, a po samom namještaju i nastavnim materijalima vidljiva je i razlika nastave u Montessori školi i tradicionalnoj školi.

Montessori pribor je poseban didaktički pribor koji se rabi u području vježbi praktičnog života, vježbi govora i kozmičkog odgoja. Važna je značajka Montessori pribora njegova

dostupnost. Dijete ga može koristiti bez prisutnosti odrasle osobe i potiče ga na aktivnost. Primjeren je potrebama i sposobnostima djeteta, vježbe prate razvojne potrebe, tj. od jednostavnijih postaju sve složenije, od konkretnijih sve apstraktnije. Montessori pribor omogućava uočavanje pogrešaka u rješavanju zadataka, odnosno dijete može samo uočiti svoje pogreške i biti samostalno u njihovu ispravljanju. Phillipps (1999) ističe mogućnost ispravljanja pogrešaka kao važno načelo Montessori pedagogije. Horton, (2016) ističe da učenici nakon korištenja Montessori didaktičkog materijala mogu primijeniti svoje znanje i vještine u novim situacijama.

Učitelj mora razviti sposobnost indirektnog vođenja, mora dopustiti djetetu da samo gradi svoju ličnost, odlučuje i postaje neovisno. Matijević (2001) tvrdi da je uloga Montessori učitelja bitno izmijenjena. On više nije poučavatelj ni predavač, već organizator i usmjeravač. Učitelj učenicima daje samo inicijalne upute, a dalje ih samo usmjerava i potiče na aktivnost bez bilo kakve vidljive prisile. Faryadi (2017) tumači da Montessori model nije ono što učitelj čini, već je to proces u kojemu ključnu ulogu ima učenik. Odnosno, učenje se ne događa slušanjem izlaganja, nego kroz iskustva u rješavanju konkretnih problemskih zadataka.

Montessori model prepoznaje jedinstvenost svakog djeteta i potencijal koji nosi u sebi. Milinković i Bogavac (2011) navode da se razvoj procesa mišljenja i izgradnje znanja javljaju u društvenom okruženju. Oni smatraju da bi škole, između ostalih vještina i znanja, trebale razviti kod učenika sposobnost prepoznavanja, formuliranja, analize i rješavanja problema. Kako bi učenici mogli rješavati problemske zadatke moraju razviti sposobnost odvajanja važnih od nevažnih informacija, argumentirati, dokazati tvrdnje, razlikovati znanstveni i iskustveni (subjektivan) pristup rješavanju problema te analizirati problem iz različitih kutova. Montessori model ima za cilj razviti više procese mišljenja, poput kreativnog mišljenja te rješavanja problema. U tom pristupu konstruiranje znanja ima prednost u odnosu na pamćenje činjenica.

Sablić i sur. (2022) tumače da je najčešća asocijacija na Montessori pedagogiju njezin didaktički materijal koji je podijeljen na materijal za vježbe iz praktičnog života, materijal za jezik, materijal za razvoj osjetila, materijal za matematiku i za kozmički odgoj. Matematički materijali vode djecu prema razvoju apstraktnog mišljenja. Didaktički materijali su konkretni predmeti (npr. blokovi, pločice) koji se koriste za dokazivanje matematičkih koncepata ili za podršku izvođenju matematičkog postupka. Larbi i Mavis (2016) ističu da su didaktički materijali često preuzeti iz svakodnevnog okoline i učenici ih mogu koristiti za učenje ili oblikovanje matematičkih pojmova. Odnosno, „to je bilo koji materijal ili predmet koji pomaže učeniku u učenju i razumijevanju matematike“ (Larbi i Mavis, 2016, str. 55). Osnovno je načelo

Montessori didaktičkog materijala da aktivnosti trebaju biti koordinirane tako da djeca dok ih koriste mogu procijeniti svoju uspješnost (Röhrs, 1994). Kombinacija poticajnog okruženja, odgovarajući Montessori didaktički materijali i osposobljavanje učitelja za provedbu Montessori pedagoškog pristupa podržava uspjeh učenika u svladavanju matematičkih sadržaja.

Didaktički materijali za matematiku mogu se naći u mnogim učionicama. Međutim u Montessori modelu koriste se jedinstveni materijali namijenjeni učenju konkretnih pojmova prije nego što prijeđu na apstraktne što se pokazalo učinkovitim. Odnosno, „učenici koji pohađaju Montessori programe u ranom djetinjstvu pokazuju visoku razinu matematičkih postignuća” (Laski i sur., 2015, str. 2) čemu doprinose didaktički materijali. Purington i sur. (2017) navode četiri načela za korištenje didaktičkih materijala:

- a. korištenje didaktičkih materijala treba biti dosljedno i dugotrajno
- b. potrebno je početi s transparentnim konkretnim prikazima i s vremenom prijeći na apstraktnije prikaze
- c. potrebno je izbjegavati didaktičke materijale koji nalikuju svakodnevnim predmetima ili usmjeravaju dječju pozornost na nevažne značajke
- d. dobro je izričito objasniti odnos između didaktičkih materijala i matematičkog koncepta (Purington, 2017).

Učinkovitost didaktičkog materijala za matematiku ovisi o tome koliko su im dugo učenici izloženi. Izloženost tim materijalima za vrijeme školske godina ili duže dovela je do umjerene veličine učinka, dok je nastava u kojoj su se koristili didaktički materijali u kraćem razdoblju dovela do razina učenja kao u nastavi bez njih (Laski i sur., 2017).

Bentley (1964) ističe da didaktički materijali u nastavi matematike daju jasnu predodžbu o broju. Nadalje, Lillard (2013) smatra da brojenjem kvadrata i kocki učenik može vidjeti i taktilno osjetiti zašto je npr. tri na treću jednako 27. Osim toga, učenici koji su koristili abakus za vrijeme računanja postali su vještiji u rješavanju matematičkih problema čak i nakon što su ga prestali koristiti. To proizlazi iz činjenice da učenici koristeći to nastavno pomagalo primjenjuju pokrete prebrojavajući perlice. Upotreba simboličkog didaktičkog materijala poboljšava računanje.

U Montessori metodi prevladava vođeno učenje kroz igru. Pri tome interesi učenika utječu na redoslijed ostvarivanja aktivnosti (Lillard, 2013). Odrasla osoba demonstrira primjere aktivnosti te potiče učenike na korištenje Montessori materijala vodeći računa o učeničkoj

slobodi izbora. Učenici sudjeluju u raznim aktivnostima koje mogu trajati gotovo nekoliko sati. Starije učenike potiče se na pomaganje i mentorstvo mlađim učenicima u projektima i zadacima. Matijević (2001) ističe bitno izmijenjenu ulogu učitelja. On usmjerava učenike i potiče ih na aktivnosti. Najprije će pred djecom prikazati zašto i kako se koriste pojedini materijali, a dalje će djeca prema vlastitom interesu raditi s tim materijalima.

Višegodišnji vremenski okvir i dosljednost između predškolskih programa i osnovnoškolskih programa pružaju učenicima velike mogućnosti da apstrahiraju matematičke koncepte predstavljene Montessori matematičkim didaktičkim materijalima (Lillard, 2005). Montessori obrazovanje omogućuje dugoročnu uporabu istih ili sličnih didaktičkih materijala. Odnosno, materijali koji su korišteni tijekom ranog djetinjstva također se koriste na početku školovanja za objašnjavanje naprednijih pojmova.

Za Montessori model uporaba zornih didaktičkih materijala u nastavi matematike je ključna. Učenici primjenjivanjem konkretnih predmeta usvajaju pojmove i razvijaju apstraktno mišljenje. Montessori didaktički matematički materijal kod učenika stvara osnovna matematička iskustva te uočavanje veza između geometrije, aritmetike i algebre. Montessori materijal za matematiku podijeljen je u šest skupina:

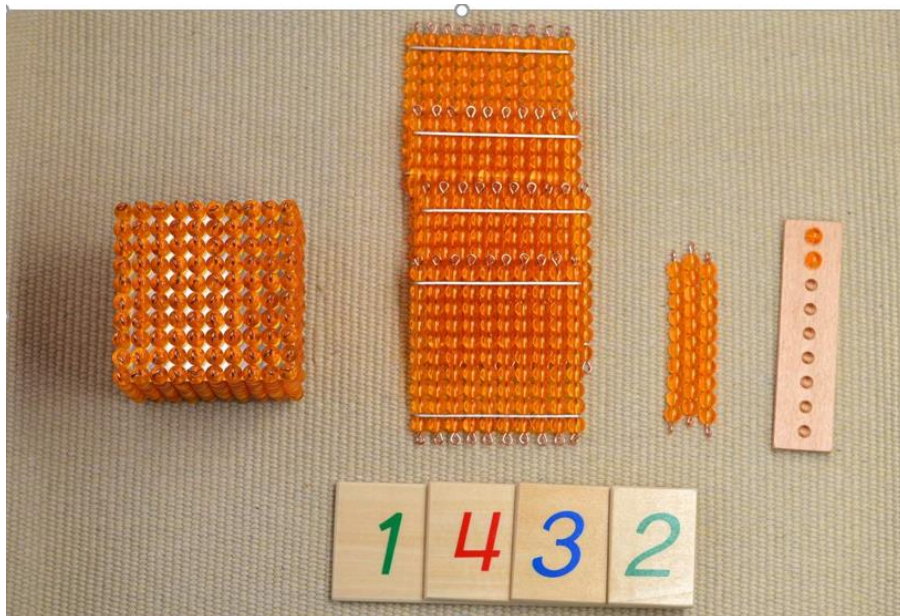
- a) Količina i simboli do 10
- b) Dekadski sustav
- c) Linerano i nelinerano prebrojavanje
- d) Aritmetičke tablice
- e) Apstraktna matematika
- f) Razlomci.⁷

Montessori didaktički materijal za matematiku treba prezentirati pomoću lekcije u tri stupnja tako da učenik može percipirati pokret i kasnije ga ispravno ponoviti. Učenik pri tome može napraviti i pogreške uzrokovane nedostatkom iskustva, međutim većinu pogrešaka mora ispraviti sam.

Među nastavnim materijalima koji se koriste u Montessori učionicama za učenje matematike jedan od najkorištenijih jesu perlice zlatne boje (slika 2). Taj materijal služi za uvođenje u dekadski sustav. Zlatne perlice su didaktički materijal kojim počinje upoznavanje s računskim

⁷ Dostupno na <http://www.infomontessori.com/mathematics/introduction.htm>.

operacijama u dobi oko pete godine i to redom: zbrajanje, množenje, zatim oduzimanje i dijeljenje. Po brojkama od jedan do devet razvrstani su lanci s perlicama koje su nanizane u grupe po dvije, tri, devet ili deset perlica. Tim materijalom djeca stvaraju senzoričku sliku koja im kasnije može pomoći u zadacima apstraktnog tipa te u računskim operacijama potenciranja i kubiranja. Korištenjem zlatnih perlica apstraktni numerički odnosi imaju konkretnu sliku i time olakšavaju razumijevanje. U tom materijalu brojčani sustav baze deset predstavljen je pomoću identičnih pojedinačnih perlica u zlatnoj boji. Deset perlica spojeno je žicama. Stotice su predstavljene kvadratima koji se sastoje od deset žica po deset zlatnih perlica. Na kraju broj tisuću predstavljen je kockom od 10 međusobno povezanih kvadrata zlatnih perlica. Brojevi se mogu prikazati pomoću zlatnih perlica. S vremenom se brojevi prikazuju na pločicama iste veličine koji označavaju jedinice, desetice, stotice i tisućice bez korištenja zornog materijala.

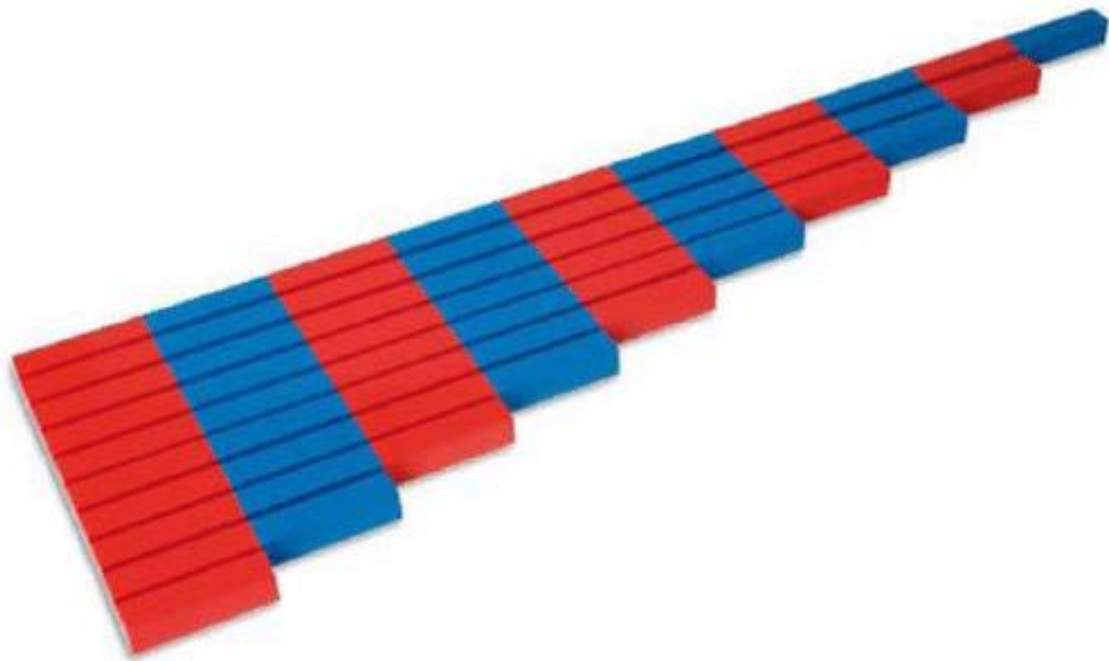


Slika 2. Upoznavanje dekadskog sustava

(Izvor: <https://canmom.com/products/montessori-golden-beads-montessori-toy-montessori-math-toy-set-montessori-math-kindergarten-math-homeschool-math-math-activities>)

Drugi je primjer set numeričkih štapova od 10 drvenih štapova prikazan na slici 3. Prema Perić (2009) numerički štapovi rabe se za „usvajanje pojma o količini i brojevima od 1 do 10, stvaranje prediskustva s metrijskim sustavom, brojenje od 1 do 10“ (Perić, 2009, str. 14). Svaki segment štapova duljine 1 cm povezuje se i služi za prikazivanje veličine i redosljeda brojeva između 1 i 10. Kada se učenici koriste štapovima mogu vidjeti da je svaki sljedeći broj točno

za jednu jedinicu (segment) veći od prethodnog broja. Specifičnost je Montessori didaktičkog materijala u tome što su osmišljeni tako da usmjere dječju pozornost na one attribute koji doprinose predstavljanju matematičkih koncepata i pridonose njihovom učenju. Osim toga, numerički štapovi uvode učenike u operaciju zbrajanja i oduzimanja. Budući da su svi štapovi perceptivno identični (tj. iste teksture, debljine i duljine), osim relevantnih atributa (npr. broj segmenata i duljina) dječju pozornost privlače samo relevantne značajke koje im ne odvlače pažnju (Laski i sur., 2013). Objašnjenje zbrajanja moguće je započeti sastavljanjem desetica od kraćih štapova. To je moguće učiniti tako da se prvo uzme najkraći štap koji označava broj jedan. Zatim se tome nadoda onoliko štapova koliko ih nedostaje do deset. Nakon toga se uzmu dva štapa i nadopuni ih se s osam itd. To može biti popraćeno naredbama: „Uzmi jedan i dodaj devet; uzmi dva i zbroji osam; uzmi tri i dodaj sedam; uzmi četiri i dodaj šest“ (Gutek, 2004, str. 238). Sve to povezuje se sa zapisima računskih operacija zbrajanja. Na sličan način može se doći i do drugih računskih operacija (oduzimanja, množenja i dijeljenja).



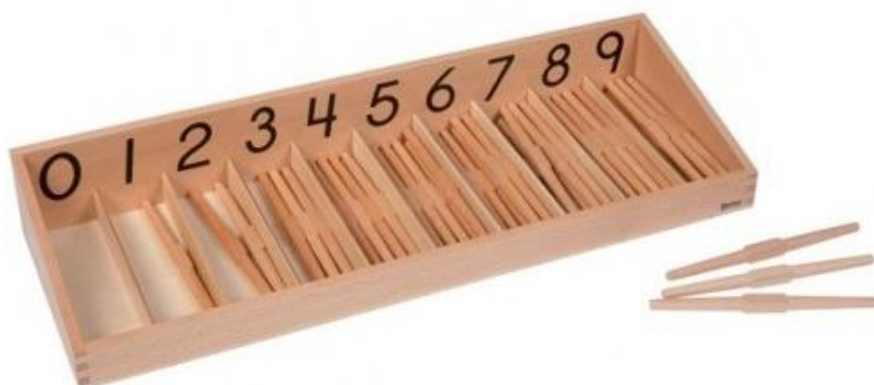
Slika 3. Skup Montessori numeričkih štapova koje predstavljaju brojeve od 1 do 10 (Laski i sur., 2013, str. 5)

Brojevi od brusnog papira (<http://www.infomontessori.com/mathematics/numbers-through-ten-sandpaper-numbers.htm>) sastoje se od drvenih pločica sa znamenkama od nula do devet te omogućavaju učenicima prepoznavanje simbola brojeva i njihovo pisanje (slika 4).



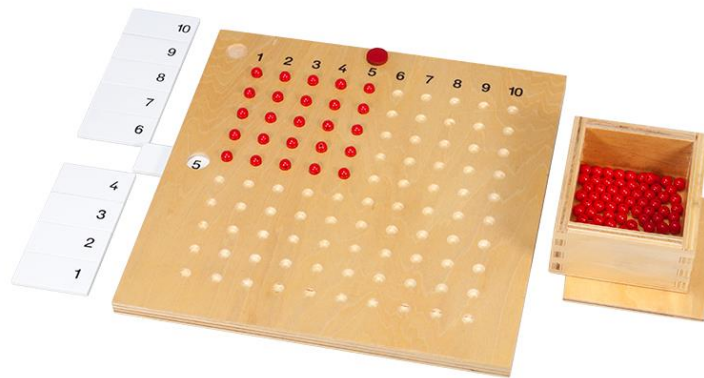
Slika 4. Brojevi od brusnog papira (Izvor: http://www.alisonsmontessori.com/Sandpaper_Numbers_p/m02.htm)

Kutija s vretenima (<http://www.infomontessori.com/mathematics/numbers-through-ten-number-rods.htm>) omogućava učenicima povezivanje količine i simbola jednoznamenkastih brojeva, uvođenje pojma broja nula i uočavanje prirodnog niza brojeva (slika 5). Kutija se sastoji od deset odjeljaka koji su numerirani brojevima od nula do devet, a sadrži i kutiju s 45 drvenih vretena i vrpce ili elastične trake.



Slika 5. Kutija s vretenima (Izvor: https://www.montessori-spirit.com/7562-thickbox_default/les-fuseaux-cursif.jpg)

Mala drvena ploča za množenje sadržava udubljenja za 10 x 10 perlica. Kutija sadrži kartice s brojevima od jedan do deset, crvene okrugle pločice i 100 crvenih akrilnih kuglica (slika 6).



Slika 6. Mala ploča za množenje (Izvor: https://www.alisonsmontessori.com/Multiplication_Board_p/m16.htm)

Prema Kofi (2017, str. 14) „istraživanja su pokazala da je Montessori obrazovanje učinkovito u poboljšanju akademskih postignuća učenika osnovnih škola“. Dohrmann (2003) je u svom longitudinalnom istraživanju u kojem su sudjelovali maturanti iz Milwaukeeja pokazala da su učenici koji su pohađali Montessori predškole i osnovne škole značajno nadmašili svoje vršnjake u rezultatima testova iz matematike i prirodoslovlja. Odnosno, studija je pokazala da su učenici koji su pohađali Montessori metodu u dobi od treće do jedanaeste godine postigli znatno bolje rezultate iz matematike i prirodoslovlja na standardiziranim testovima u srednjoj školi.

Donabella i Rule (2008) ističu pozitivan utjecaj Montessori didaktičkog materijala za matematiku na znanje učenika sedmih razreda. Na temelju rezultata testova utvrđeno je bolje razumijevanje množenja. Osim toga, rezultati ankete upućuju na učeničko veće zadovoljstvo u učenju. Na kraju, učenici su razvili samopouzdanje u rješavanju problemskih zadataka.

Lillard (2012) je u svom istraživanju ispitala utjecaj dosljednosti implementacije Montessori modela. Njezina je studija otkrila da učenici u učionicama s visokom dosljednošću realizacije programa pokazuju značajno veće rezultate na kraju školske godine. Ishodi učenja učenika u čitanju, u matematici, rješavanju problemskih zadataka bili su veći nego kod učenika koji nisu pokazali predanost programu ili u uobičajenim tradicionalnim učionicama.

Rathunde (2003) navodi rezultate istraživanja u kojem se uspoređivalo učenike srednjih škola koji su pohađali Montessori model s učenicima u tradicionalnim srednjim školama. Uspoređujući ih pronađena je značajno veća motivacija i socijalizacija Montessori učenika. Te razlike sugeriraju da su Montessori učenici pokazali veći osjećaj aktivnijeg, snažnijeg, uzbuđenijeg, sretnijeg, opuštenijeg, društvenijeg i ponosnijeg angažmana u akademskim aktivnostima. Također su više uživali te ih je više zanimalo ono što su učili. Osim toga, više su birali akademske aktivnosti od učenika koji su poučavani tradicionalnim nastavnim metodama.

Sablić i sur. (2015) u provedenom istraživanju ispitali su stavove učitelja i studenata – budućih učitelja – o primjeni Montessori didaktičkog materijala u nastavi. I učitelji i studenti, kada didaktičke materijale smatraju vrijednima i korisnima, pokazuju spremnost na njihovo uvođenje u redovitu nastavu. Pozitivno vrednovanje i interes sudionika za uvođenje materijala u nastavu mogu biti polazišta i za uvođenje sadržaja alternativnih pedagoških koncepcija u studijske programe učiteljskih fakulteta u Hrvatskoj, kao i u cjeloživotnu izobrazbu učitelja, što doprinosi obrazovanju fleksibilnog, otvorenog, temeljito obaviještenog i stručnog učitelja.

Rajić (2009) tumači kako je bitno informirati javnost i roditelje o alternativnim oblicima školovanja ako želimo unaprijediti škole. Ističe istraživanje koje je provedeno u SAD-u, u kojem roditelji smatraju da su za djecu bolje alternativne škole kada je u pitanju sigurnost, disciplina, individualizirani pristup djetetu i akademski standard. Ona također spominje primjer zadovoljstva i dobru informiranost roditelja čija su djeca su pohađala Faxon magnet-školu.

Nadalje, Sablić i sur. (2022) proveli su istraživanje u kojem su nastojali ostvariti promjene u obrazovnim predmetima primjenom Montessori pedagogije. Smatraju da većina učenika matematiku doživljava teškom i zahtjevnom. Takvo su mišljenje kod učenika pokušale mijenjati prikazujući učenicima matematiku u konkretnim situacijama i koristeći se didaktičkim materijalom koji je specifičan, dopušta, ali ispravlja pogreške i svakoga dovodi do cilja (Sablić i sur., 2022). Istraživanje je pokazalo da se implementacijom didaktičkog materijala u nastavu matematike kod pojedinih učenika razvija samopouzdanje, samostalnost, odgovornost, radne navike i urednost. Osim toga, uporaba Montessori materijala pomaže pri razvoju matematičkog razmišljanja, a materijali predstavljaju simbole, količinu, dekadski sustav i računske operacije na konkretnoj razini. To je važno jer djeca moraju od konkretnog prijeći na apstraktni način mišljenja.

3.2.2. Singapurski model nastave matematike

Singapurski je obrazovni sustav prema Wong i sur. (2009) formiran po modelu 6-2-2. To znači da Singapurci trebaju pohađati šest godina osnovnu školu, dvije godine nižu srednju školu i ostvariti dvije godine višeg srednjeg obrazovanja. Osim ovoga, učenici mogu nastaviti s dvije ili tri godine predsvučilišnog obrazovanja na fakultetu, upisati se na veleučilišta i druge institute ili se zaposliti. Plan da se osigura šest godina besplatnog osnovnog obrazovanja za singapursku djecu svih rasa prvi put lansiran je 1947. godine. Roditeljima koji ne šalju svoju djecu u škole predviđena je novčana kazna do 5000 USD, zatvor do godinu dana ili oboje. Većina roditelja omogući djeci da ostvare općenito deset godina obrazovanja jer shvaćaju njegovu važnost. Singapur slijedi meritokratski, ali konkurentan obrazovni sustav koji pruža jednake mogućnosti svima bez obzira na njihovu etničku pripadnost ili društveno-ekonomski status.

Singapurske javne škole od osnovnih do predsvučilišnih razina financira Ministarstvo obrazovanja. Toh i sur. (2019) ističu da su osamdesetih godina prošlog stoljeća singapurski učenici imali velike poteškoće u rješavanju problemskih zadataka. Stoga je Ministarstvo obrazovanja Singapura uspostavilo povjerenstvo za izradu novih matematičkih kurikuluma koji su se počeli koristiti od 1981. godine. Temeljili su se na zadovoljavanju interesa učenika, kao i na novim trendovima u matematičkom obrazovanju.

Jedan od glavnih rezultata tih napora bilo je usmjeravanje na rješavanje problemskih zadataka kao primarni cilj. To se odrazilo i na povećanje istraživanja rješavanja problema u nastavi matematike.

Prema Wong i sur. (2009) cilj je singapurskog matematičkog kurikuluma razvijanje matematičkih kompetencija učenika, osobito rješavanja problema. Ministarstvo obrazovanja 1988. godine osmislilo je matematički okvir za osnovnu i srednju školu. Matematički je okvir 1990. godine uveden u nastavni plan i program za osnovne škole i niže srednje škole, a od 2003. godine obuhvaća sve razine obrazovanja (slika 7).



Slika 7. Matematički okvir singapurskog kurikuluma 1990. (Wong i Lee, 2009, str. 33, *prev.*, S. M. H.)

Okvir prikazuje principe učinkovitog matematičkog programa koji se primjenjuje na svim razinama od osnovne do napredne. Ovaj okvir postavlja u središte nastave matematike rješavanje problemskih zadataka i okružuje ga s pet međusobno povezanih čimbenika: pojmovi, vještine, procesi, metakognicija i stavovi. Novija verzija okvira iz 2001. uključivala je „ustrajnost“ pod točkom stavova. Misaone vještine uključuju dedukciju, indukciju, prostornu vizualizaciju, klasifikaciju i traženje uzroka. Navedenih pet čimbenika u matematičkom okviru pružaju učenicima mogućnost učvršćivanja *pojmovi* i *vještina*. Pojmovi i vještine povezuju konkretna iskustva s apstraktnim idejama. *Stavovi* se odnose na afektivna područja kao što su uživanje u učenju, uvjerenja o matematici i njezinoj korisnosti. *Metakognicija* ili „mišljenje o mišljenju“ upućuje na svijest i kontroliranje misaonih procesa, omogućuje učenicima neovisnost i ohrabruje ih na druge načine rješavanja matematičkih problema. „Metakognicija uključuje znanje o sebi i strategijama koje mogu biti korištene pri rješavanju različitih problema, znanje o uvjetima u kojima te strategije mogu biti upotrijebljene, te poznavanje sadržaja i konteksta u kojem su strategije učenja učinkovite“ (Koludrović, 2013). *Procesi* omogućuju primjenu znanja, omogućuju učenicima istraživanje različitih načina rješavanja problema koristeći višu razinu kompetencija (Wong i sur., 2009).

Fong (2013) navodi različite teorijske pristupe na kojima se temelji singapurski model nastave matematike. Singapurski model polazi od značajki konstruktivističkog pristupa. U tom

teorijskom pristupu naglasak je postavljen na učeničko samostalno stvaranje znanja, neformalno procjenjivanje i promišljanje naučenog, razumijevanje matematičkih pojmova, računanje, a naglasak je i na vještinama rješavanja matematičkih problema kroz suradničko učenje. Učenici trebaju uočiti povezanost matematičkih pojmova kako bi mogli rješavati matematičke probleme i istraživati.

Za singapurski model važna je Brunerova teorija. Jukić i Širić (2018) u toj teoriji ističu važnost didaktičkih materijala koji se temelje na tri aspekta: konkretno – slikovno – apstraktno (CPA)⁸. Prema Chang i sur. (2017) Bruner smatra da učenje počinje aktivnim angažmanom ili iskustvom dobivenim konkretnom situacijom. Zatim učenici nastoje podijeliti svoje razumijevanje pomoću konkretnih i slikovnih prikaza. Na kraju, učenike se vodi do apstraktnih matematičkih pojmova ili ideja. Uloga je učitelja voditi učenike kroz konkretne materijale, slikovne i apstraktne razine razumijevanja pružajući im istovremeno učinkovite povratne informacije. Jukić Matić i Širić (2018) tumače da u tom pristupu učenici rabe konkretne objekte i slikovne prikaze kako bi predstavili poznate i nepoznate matematičke veličine i njihove odnose u zadatku. Leong i sur. (2017) navode da je konkretno-slikovno-apstraktni model od velike pomoći učenicima s teškoćama u učenju matematike. Učenici mogu manipulirati didaktičkim sredstvima i drugim izvorima tijekom konstruiranja razumijevanja zadataka.

Bruner naglašava konkretno predstavljanje, što je u skladu s dječjom sposobnošću razumijevanja matematičkih pojmova u ranim razvojnim fazama. Međutim, djeca ne mogu previše ovisiti o konkretnom predstavljanju jer moraju prijeći na sljedeću razinu kako bi mogli razumjeti apstraktne pojmove u čemu im mogu pomoći slikovni prikazi, poput metode modela. Prema Jukić Matić i Širić (2018) to je osnovna metoda koja se koristi za rješavanje problemskih zadataka. Sastoji se dva osnovna dijela: model dio – cjelina i model usporedbe. Metoda je dobila još više na važnosti nakon što je Singapur bio prvi u TIMSS istraživanju 1995., 1999., 2003., 2011. i 2015. godine. Iako se mnogi zadatci ne mogu riješiti metodom modela, ona ima važnu ulogu te pomaže prosječnim i ispodprosječnim učenicima u rješavanju problema.

Skempova teorija instrumentalnog razumijevanja ističe važnim usredotočiti se na to kako učenici misle i razvijaju se u učenju matematike. Ako učenik razumije neku činjenicu u odnosu na druge činjenice (razumijevanje odnosa), prije će ju zapamtiti nego činjenice koje nedovoljno razumije (instrumentalno razumijevanje). Skemp (1976, str. 92) definira instrumentalno razumijevanje kao „pravila bez razloga, bez shvaćanja za mnoge učenike i njihove nastavnike.“

⁸ CPA – *Concrete-Pictorial-Abstract approach* (konkretno-slikovno-apstraktni pristup).

Razumijevanje odnosa pomaže djeci u proširivanju znanja i u rješavanju problema. To je povezano s pristupom konkretno – slikovno – apstraktno. Korištenje konkretnog i slikovnog prikaza pomaže djeci u razumijevanju predstavljenih koncepata i razvoju vještina.

Piagetova teorija također predstavlja teorijsko polazište za singapurski model nastave matematike (Ojose, 2008). Piagetova teorija ističe da se djeca razvijaju postupno kroz različite faze i da iskustva u jednoj fazi čine temelj za kretanje prema narednoj. Identificirao je četiri faze razvoja: senzomotorička, predoperacijska, faza konkretnih operacija i faza formalnih operacija. U senzomotoričkoj fazi (od rođenja do druge godine života) karakteristična je sposobnost djetetova pronalaska predmeta nakon što su pomaknuti, čak i ako predmeti nisu bili u njegovu vidnom polju. Osim toga za ovu fazu karakteristična je sposobnost povezivanja brojeva s objektima. U predoperacijskoj fazi (od druge do sedme godine) djeca bi se trebala baviti rješavanjem problema koji uključuju dostupne materijale poput blokova, pijeska i vode (Ojose, 2008). U razdoblju konkretnih operacija (od sedme do jedanaeste godine) naglasak je postavljen na praktične aktivnosti (Piaget, 1964). Te aktivnosti omogućuju učeniku da polazeći od konkretnih materijala dođe do matematičkih ideja i koncepata potrebnih za rješavanje matematičkih problema. Dijete je u stanju logički zaključivati, ali uz pomoć konkretnih materijala (Lourenço, 2014). U razdoblju formalnih operacija (od 12. ili 13. godine do adolescencije) djeca mogu formirati hipotetičko-deduktivno zaključivanje. Kod djece se počinju razvijati apstraktni obrasci mišljenja u kojima se izvodi zaključivanje i korištenje čistih simbola bez potrebe percepcije. Odnosno, „jednom kada su operacije usvojene, iskustvo više nije potrebno i koordinacija aktivnosti može se ostvariti dedukcijom i konstrukcijom iz apstraktnih struktura“ (Piaget, 1964).

Prema Thirumurthy i Seng (2000) Vigotski je smatrao da društveno iskustvo oblikuje djetetovo tumačenje svijeta i da jezik igra važnu ulogu kao primarno sredstvo komunikacije. U Singapuru su učitelji vrlo interaktivni u učionicama i koncentriraju se na postavljanje pitanja. Mnogi kroz interakciju s učenicima pokušavaju potaknuti njihove ključne matematičke sposobnosti i vještine. Rješavanje težih matematičkih zadataka omogućuje suradničko učenje ili učenje u parovima. Ono što najviše pomaže tijekom rješavanja zadataka jesu učiteljeve upute i postavljanje pitanja, davanje povratnih informacija tijekom rješavanja zadataka i ukazivanje na pogreške. Zona proksimalnog razvitka upućuje na to da učenici postižu mnogo više nego što bi postigli bez obrazovnog utjecaja odrasle osobe, najčešće učitelja. Odnosno, zona proksimalnog razvitka „je razlika između aktualne razvojne razine koja je određena nezavisnim rješavanjem problema i razine potencijalnog razvoja određenog rješavanjem problema uz

vođenje odrasle osobe ili u suradnji sa sposobnijim vršnjakom“ (Vigotsky, 1978, str. 78). Dakle, zona proksimalnog razvitka je razina djetetova razvoja koja je vidljiva ne u individualnoj aktivnosti djeteta, već u suradnji s odraslom osobom (Podolskiy, 2012). Aktivnosti koje su zastupljene u nastavi matematike kao što su vođene razredne rasprave, suradničko učenje, učenje u paru omogućuje učenicima suradnju s učiteljima i vršnjacima kako bi prešli preko svoje trenutne zone proksimalnog razvitka na višu razvojnu razinu.

Blalock (2011) je provela istraživanje o učinkovitosti singapurskog matematičkog kurikuluma i učeničkog zadovoljstva u učenju matematike u jednom ruralnom školskom okrugu u sjevernoj Lousiani. Učenici prvog razreda kategorizirani su u dvije skupine. Jedna skupina učila je matematiku prema singapurskom modelu, dok je druga učila po tradicionalnom modelu. Učenici singapurske skupine postigli su bolje rezultate iz matematike, dok je tradicionalna skupina postigla lošije rezultate. Razlog tome proizlazi iz činjenice da je singapurska skupina uglavnom usvajala matematičke vještine, a tradicionalna skupina činjenično znanje.

Mahoney (2012) je proveo istraživanje u kojem se ispitivao učinak singapurskog modela na rezultate rješavanja matematičkih problema učenika trećih i četvrtih razreda. Intervencija je ostvarena kroz osam nastavnih susreta. Rezultati su pokazali pozitivan odnos izvedbe sudionika tijekom rješavanja matematičkih problema. Postotak ispravno riješenih matematičkih problema porastao je nakon što su učenici počeli koristiti singapurski pristup rješavanja složenih matematičkih problema zadanih riječima.

Badger (2013) prezentira implementiranje singapurskog kurikuluma u 21 školi u Georgiji. Prije same implementacije novog kurikuluma učitelji su sudjelovali u dvodnevnom stručnom usavršavanju u kojemu im je predstavljen singapurski model i manipulati. U istraživanje su bili uključeni učenici predškolskog uzrasta, prvi, drugi, treći i četvrti razred osnovne škole. Pokazatelji uspješnosti provedbe singapurskog kurikuluma bile su učiteljske ankete, intervjui, dnevници, testovi te ocjene učeničkih postignuća iz matematike. Intervencija je povećala postignuća učenika iz matematike. Međutim, rezultati evaluacije pokazali su da bi se učiteljima olakšavanje provedbe novog pristupa moglo omogućiti kroz radionice koje se održavaju tijekom cijele školske godine. To bi smanjilo njihovu anksioznost oko uvođenja novog kurikuluma.

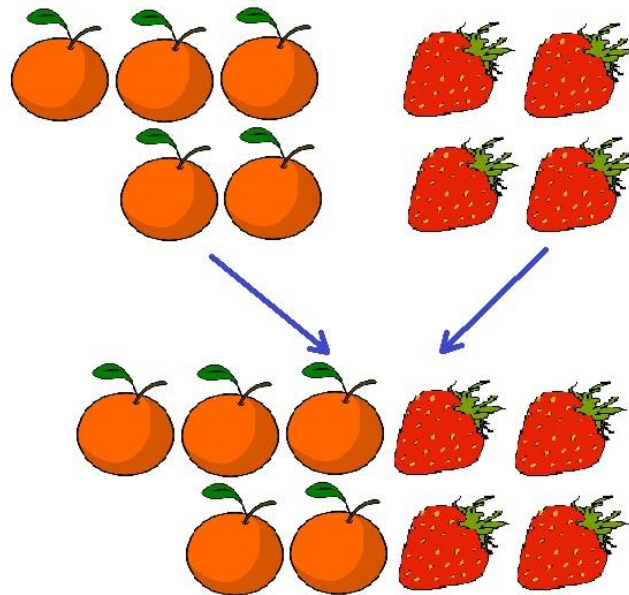
Lindorff i sur. (2019) izvještavaju o matematičkom programu čiji je cilj povećanje učeničkih postignuća iz matematike te stavljaju naglasak na razinu usvojenosti, tj. osiguravanje da svi učenici shvate ključne pojmove prije prelaska na nove teme. Program se temelji na matematičkim udžbenicima „Moji prijatelji su ovdje!“ koji se koriste u gotovo svim državnim

osnovnim školama u Singapuru. Osim toga, program se temelji na konkretno-slikovno-apstraktnom pristupu koji osigurava dublje razumijevanje matematičkih pojmova. Spiralno osmišljeno napredovanje u programu s vremenom doprinosi učeničkom usvajanju znanja, a inspirativno vođena nastava matematike promiče raspravu i stavlja naglasak na matematički jezik, odgovore punom rečenicom i zaključivanje. Učitelji se na nastavi matematike koriste specifičnim pitanjima koja promiču učeničko razumijevanje te služe za prepoznavanje učeničkih zabluda. Uz udžbenike učenici koriste vježbenice. Vježbenice doprinose konceptualnom razumijevanju i potiču učenike na samostalnost. Vježbenice uključuju mnoštvo izazovnih pitanja i problemskih zadataka s riječima. Konkretno-slikovno-apstraktni pristup pomaže učenicima u učenju novih ideja i nadogradnji postojećeg znanja uvodeći apstraktne koncepte na taktilno-vizualni način. Za razliku od tradicionalne nastave matematike u kojoj učitelj pokazuje rješavanje problema, konkretno-slikovno-apstraktni pristup oživljava koncepte dopuštajući učenicima samostalno iskustvo i rukovanje fizičkim predmetima. Svaki novi apstraktni koncept uči se na temelju konkretnog iskustva. Učenici prvo rukuju stvarnim predmetima prije prelaska na modele koji se koriste za predstavljanje predmeta. Također je prisutna i stvaralačka faza pomoću konkretnih predmeta za modeliranje problemskih zadataka. Lindorff i sur. (2019) proveli su eksperimentalno istraživanje nastojeći usporediti korištenje uobičajenih udžbenika matematike i tradicionalnog pristupa nastavi u Engleskoj te singapurskih udžbenika i model nastave matematike. Istraživanje je pokazalo značajan pozitivan učinak na učeničke rezultate iz matematike u grupi koja je učila prema singapurskom modelu.

Metoda modela koristi se prema Jukić Matić i Širić (2018) u nižim razredima osnovne škole kao osnovna strategija za rješavanje problemskih zadataka. Uključuje dvije sastavnice: model dio – cjelina i model usporedbe. Ta metoda olakšava rješavanje zadataka riječima (Eberling i sur., 2019). Učenici tijekom rješavanja problemskih zadataka koriste razne strategije kako bi riješili zadatak, a jedna je od njih i crtanje. To obično podrazumijeva crtanje životinja, predmeta, voća itd. U Singapuru učenici uče objekte prikazivati pravokutnicima koji im omogućavaju uočavanje odnosa brojeva, a ne fokusiranje na objekte. Pravokutnici se koriste jer se lako crtaju, dijele, predstavljaju veće brojeve i prikazuju proporcionalne odnose.

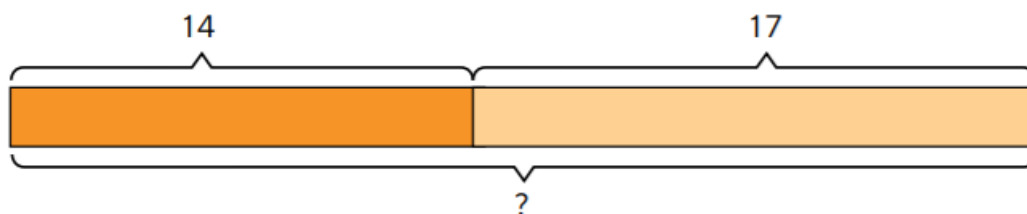
U sastavnici *model dio – cjelina* učenici koriste konkretne objekte kako bi prikazali brojeвне odnose. Osim toga, koriste pravokutnike kao slikovni prikaz modela. Učenici se prvo služe konkretnim predmetima kako bi ih razvrstali u dvije grupe i onda zbrojili. Kao primjer može poslužiti slika 8 na kojoj Ana ima 5 naranči, a Ivan ima 4 jagode. Treba izračunati koliko voća

imaju zajedno. Učenici zbrajaju brojeve 5 i 4 gdje dobivaju ukupan zbroj. Na kraju zapisuju zadatak: $5 + 4 = 9$.



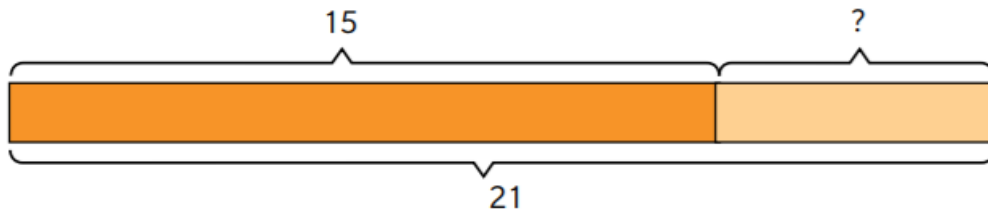
Slika 8. Slikovni prikaz konkretnih predmeta koji se koristi u zbrajanju

Učenici se u drugom razredu prvi puta upoznaju sa slikovnim modelom u kojemu se za rješavanje zadataka zbrajanja ili oduzimanja koriste pravokutnici. Na primjer, Helena ima 14 peciva, njezina prijateljica ima 17 peciva. Treba izračunati koliko peciva imaju zajedno. U tom zadatku operacija zbrajanja prikazana je na slici 9. Rezultat je veličina cjeline. Učenici trebaju napisati jednakost: $14 \text{ (dio)} + 17 \text{ (dio)} = 31 \text{ (cjelina)}$ što je odgovor na postavljeno pitanje. Odnosno, zajedno imaju 31 pecivo.



Slika 9. Slikovni model u kojemu se za prikaz zbrajanja koriste pravokutnici (Clark, 2010, str. 2)

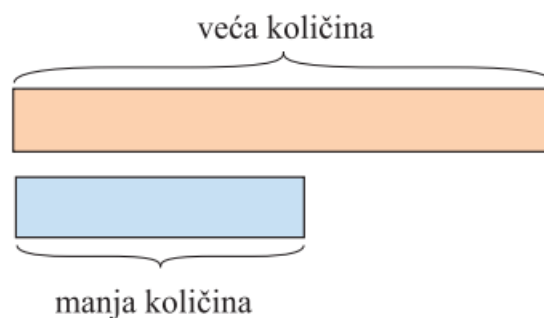
Sljedeći primjer prikazan je na slici 10. U zdjeli je 21 ribica. Petnaest ribica pripada učenicima. Ostale su ribice vlasništvo škole. Koliko je ribica u školskom akvariju?



Slika 10. Slikovni model u kojemu se za prikaz oduzimanja dijela od cjeline koriste pravokutnici (Clark, 2010, str. 2)

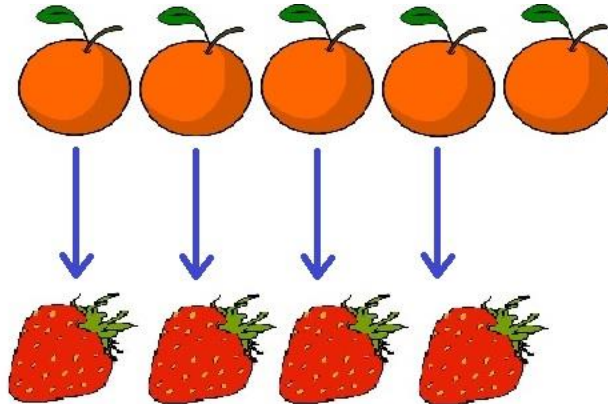
U ovom primjeru učenici imaju zadanu cjelinu (21 ribica) i jedan dio (15 učeničkih ribica). Nepoznatu veličinu drugog dijela zadatka dobivaju operacijom oduzimanja. Učenici trebaju oduzeti jedan dio od cjeline, na taj način izračunavaju nepoznatu varijablu koja pomaže u prijelazu na apstraktno: 21 (cjelina) $- 15$ (dio) = 6 (dio). Dakle, u zdjeli je ukupno 6 ribica koje su u vlasništvu škole.

Drugi model koji učenici koriste u singapurskoj metodi je *model usporedbe*. Prema Jukić Matić i Širić (2018) model usporedbe koristi se za zbrajanje i oduzimanje u zadacima koji u sebi sadrže izraze više od i manje od. Zbrajanje se koristi kako bi se pronašla ukupna vrijednost dviju veličina, a oduzimanje kako bi se utvrdila razlika između dviju veličina, kao i jedna veličina ako je zadana druga i razlika između njih (slika 11).



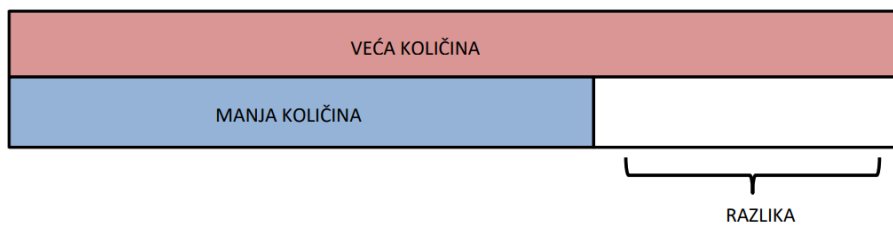
Slika 11. Slikovni prikaz modela usporedbe (Jukić Matić i Širić, 2018, str. 196)

Na slici 12 prikazan je sljedeći zadatak: Ana ima jednu naranču više nego što Ivan ima jagoda. Ako Ana ima pet naranči, treba izračunati koliko onda Ivan ima jagoda. Slika služi za usporedbu broja naranči i jagoda. Na temelju slikovnog prikaza moguće je uočiti da je broj jagoda za jedan manji od naranči, što znači da ima četiri jagode.



Slika 12. Slikovni prikaz modela usporedbe u kojemu je poznat broj naranči, a treba odrediti koliko ima jagoda

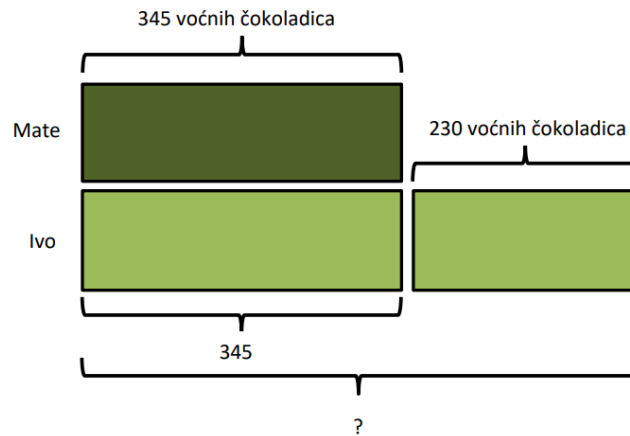
Učenici u drugom razredu već poznaju slikovni model tako da prethodni zadatak mogu prikazati korištenjem pravokutnika (slika 11). Model usporedbe učenici koriste kako bi usporedili dvije veličine. Razliku će dobiti oduzimanjem manje količine od veće količine (slika 13). Poslije toga pišu zadatak i računaju: 5 (veća količina) $- 1$ (razlika) $= 4$ (manja količina).



Slika 13. Prikaz modela usporedbe uz korištenje pravokutnika u kojemu je poznat broj naranči, a treba odrediti koliko ima jagoda

Na slici 14 prikazan je primjer zadatka usporedbe: Mate je kupio 345 voćnih čokoladica. Ivo je kupio 230 voćnih čokoladica više od Mate. Treba izračunati koliko je voćnih čokoladica

kupio Ivo. Do rezultata se može doći na sljedeći način: $345 + 230 = 575$. Dakle, Ivo je kupio 575 voćnih čokoladica.



Slika 14. Primjer zadatka usporedbe (Clark, 2010, str. 3)

Korištenjem dva pravokutnika vizualni prikaz problemskog zadatka učenicima postaje jasniji. Čak i kada problemski zadatak postane složeniji vizualni prikaz omogućuje učenicima shvaćanje da prvo trebaju izračunati koliko čokoladica ima Ivo, a koliko Mate kao i koliko čokoladica imaju zajedno. Koristeći ovaj model učenici mogu riješiti mnoge problemske zadatke zbrajanja i oduzimanja.

4. SUSTAVNI PREGLED LITERATURE

4.1. Metodologija

Sustavni pregled literature je znanstveno istraživanje u kojemu se analiziraju rezultati već obavljenih istraživanja iz relevantnih elektroničkih bibliografskih baza podataka koja su fokusirana na određenu temu istraživanja.

Sustavni pregled literature sastoji se od sljedećih koraka: prvo je potrebno definirati istraživačka pitanja, a zatim ključne pojmove za pretraživanje odgovarajućih baza podataka. Sljedeći korak odnosi se na selekciju radova na temelju kriterija za uključivanje i isključivanje uz kriterije metodološke kvalitete publikacija. Nakon toga potrebno je pronaći sve studije koje pouzdano odgovaraju na istraživačka pitanja. Na kraju podatke koji odgovaraju na istraživačka pitanja potrebno je analizirati i interpretirati (Kugley i sur., 2017; Petticrew i Roberts, 2006; Siddaway, Wood, i Hedges, 2019).

Ovaj sustavni pregled literature ispituje eksperimentalna i kvaziekperimentalna istraživanja koja su usredotočena na značajke kvalitetne nastave matematike. Cohen i sur. (2007) ističu kao osnovno obilježje eksperimentalnih istraživanja

...to da istraživači namjerno kontroliraju i manipuliraju okolnostima koje određuju događaje koji njih zanimaju. U svojem najjednostavnijem obliku, eksperiment uključuje izazivanje promjene u vrijednosti jedne varijable – nazvane „nezavisna varijabla“ – i opažanje učinka te promjene na drugu varijablu, koja se naziva „zavisna varijabla“. (str. 211)

Prema Cohen i sur. (2007) većina je empirijskih istraživanja u obrazovanju kvaziekperimentalna, a ne eksperimentalna. Razlika između kvaziekperimenta i pravog eksperimenta (u daljnjem tekstu eksperiment) jest to da u prvom slučaju istraživač svoje istraživanje provodi na skupinama koje su formirane na temelju aritmetičkih sredina, a ne na temelju slučajnog odabira. U eksperimentalnom istraživanju istraživači nasumično dodjeljuju sudionike različitim uvjetima eksperimentalne varijable. Osim toga, sudionici u eksperimentalnoj skupini primaju tretman, dok oni u kontrolnoj skupini ne.

Kvaziekperimenti uključuju raspored, ali ne i nasumično raspoređivanje sudionika u grupe. To je zato što eksperimentator ne može umjetno stvoriti skupine za eksperiment. Na primjer, za proučavanje novog matematičkog programa može koristiti postojeće četvrte razrede i odrediti jedan kao eksperimentalni, a drugi kao kontrolnu skupinu. Slučajno raspoređivanje učenika u dvije skupine poremetilo bi učenje u učionici. Budući da odgajatelji često koriste netaknute skupine (škole, fakulteti ili školski okruzi) u pokusima, često se koriste kvaziekperimentalni nacrti. (Creswell, 2012, str. 309–310)

U ovom sustavnom pregledu literature nastojala sam odrediti značajke kvalitetne nastave prisutne u izabranim istraživanjima i na koji se način te značajke koriste u nastavi matematike. U skladu s tim pokušat ću odgovoriti na sljedeća istraživačka pitanja:

1. Koje su značajke učinkovite nastave matematike prisutne u izabranim (kvazi)eksperimentalnim istraživanjima?
2. Kako se utvrđene značajke koriste u nastavi matematike?

Kako bih odgovorila na navedena istraživačka pitanja, bilo je potrebno definirati mjerila za razlikovanje učinkovitih i neučinkovitih programa. Za kvantitativne studije veličina efekta učinka (u ovom istraživanju odnose se na matematička postignuća učenika) i njegova statistička značajnost važni su za procjenu statističke značajnosti efekta učinka (p treba biti manje od 0,05). Prema Kraftu (2020) postoje smjernice za tumačenje veličine učinka, a veličina učinka ovisi o različitim faktorima kao što su vrsta mjere, dizajn istraživanja, troškovi ulaganja u najisplativije programe itd.

Klesarić i Tomašić Humer (2016, str. 7) navode kako postoje dvije porodice efekata učinka. „Jedna se temelji na razlici između statističkih vrijednosti rezultata (najčešće su to aritmetičke sredine) dviju ili više skupina ispitanika. Druga se temelji na asocijaciji, korelaciji među varijablama.“ Za efekte učinka koji se temelje na razlici aritmetičkih sredina istaknuto mjesto ima Choenov d -indeks koji se izračunava prema sljedećoj formuli:

$$d = \frac{M_E - M_K}{SD}$$

Dakle, efekt učinka izražen kao Cohenov d -indeks može se izračunati tako da razliku aritmetičke sredine eksperimentalne grupe (M_E) i aritmetičke sredine kontrolne grupe (M_K) podijelimo zajedničkom standardnom devijacijom (SD) obiju grupa (Lipsey i sur., 2012). Guskey (2019) ističe veličinu učinka kao ključan alat pri razmatranju učinkovitosti različitih politika strategija, prakse ili inovacija u obrazovanju. Kako bi ga se koristilo na odgovarajući način u donošenju važnih odluka u poboljšanjima u obrazovanju bitno je znati kako ga interpretirati. Cohen i sur. (2007) smatraju da nam veličina učinka olakšava usredotočiti se na to što rezultat znači za obrazovanje, umjesto da pokušavamo utvrditi njegovu važnost prema statističkoj značajnosti.

Kraft (2020) navodi kako se tumačenje veličine učinka može zasnivati na trajanju intervencije, razlikama u postignućima, promjenama u postotnom poretku, razlikama u učinkovitosti nastavnika ili škole. On smatra da veličina učinka ovisi o načinima mjerenja, kao

i o vremenu mjerenja rezultata koji također utječu na veličinu učinka. Veličine učinaka izmjerene posebno dizajniranim testovima veće su od onih utvrđenih standardiziranim državnim testovima. Osim toga procjena ishoda odmah nakon završetka intervencije vjerojatno će pokazati veći efekt učinka nego ona ostvarena mjesecima ili godinama kasnije (Bailey i sur., 2017). Razlike u pouzdanosti mjerenja rezultata također djeluju na veličinu učinka kao i odluke o istraživačkom dizajnu i analizi. Ciljane intervencije stvaraju veće efekte učinka od univerzalnih intervencija jer se u uzorak odabiru sudionici između kojih je manja varijacija u rezultatima (Cheung i Slavin, 2016, prema Kraft, 2020). Procjene praktičnog značaja veličine učinka ovise o troškovima ulaganja u intervenciju. Također, učinkovitost intervencije povećava se ako je politički izvediva i ne suočava se s protivljenjem upravljačkih struktura.

Prema Lipsey i sur. (2012) praktični značaj intervencijskog učinka nije samo numerička vrijednost proizašla iz eksperimentalnih istraživanja, nego nešto što se mora prosuditi u određenom kontekstu primjene. Pri tumačenju njezina praktičnog značaja potrebno je imati mjerila na temelju kojih se može procijeniti učinak intervencije. Jedan od načina procjene značaja intervencijskog učinka jest usporedba s učincima utvrđenim za slične intervencije sa sličnim istraživačkim uzorcima i mjerama ishoda. To predstavlja svojevrsnu normativnu usporedbu. Veličina učinka ocjenjuje se u odnosu na raspodjelu rezultata utvrđenih u drugim studijama.

Cheung i Slavin (2016) utvrdili su u svom istraživanju da je veličina učinka veća u kvaziekperimentalnim istraživanjima, nego u randomiziranim istraživanjima. Osim toga, utvrdili su da objavljene studije imaju znatno veći efekt učinka nego neobjavljene. Međutim, Lipsey i Wilson (2011, prema Cheung i Slavin, 2016) smatraju da neobjavljeno istraživanje također može biti kvalitetno kao i objavljeno te da je ipak bitnije orijentirati se na metodološke kriterije izvještaja, a ne na publikacijski status radova. Na temelju analize 645 studija ističu još četiri metodološke značajke koje snažno utječu na veličine učinka: istraživački testovi korišteni u istraživanju, veličina uzorka u istraživanju, (kvazi)eksperimentalni dizajn istraživanja i (ne)objavlivanje rada.

Ovim sustavnim pregledom ocijenila sam učinkovitost studija korištenjem referentnih vrijednosti za različite vrste mjera koje su utvrdili Lipsey i sur. (2012). Oni su „te mjere kategorizirali kao: a) standardizirane testove koji pokrivaju široku temu, (b) standardizirane testove koji se usredotočuju na uže teme i (c) specijalizirane testove razvijene posebno za intervenciju“ (Lipsey i sur., 2012, str. 33). Zbog toga je u posljednjem stupcu u tablici 4 osim veličine efekta učinka navedena vrsta korištenog instrumenta. Prema Lipsey i sur. (2012)

prosječne vrijednosti efekta učinka za široko usmjerene standardizirane testove iznose 0,08, prosječni efekt učinka od 0,24 utvrđen je za usko usredotočene standardizirane testove i 0,39 za istraživačke testove (Lipsey i sur., str. 34). I vrsta eksperimentalnog istraživačkog dizajna može imati utjecaj na veličinu efekta učinka (Cheung i Slavin, 2016). U tablici 4 navedeno je je li riječ o kvaziekperimentalnom ili eksperimentalnom istraživanju.

Tablica 3. Kriteriji za uključivanje i isključivanja studija

Kriteriji uključivanja	Kriteriji isključivanja
U istraživanju sudjeluju učenici razredne nastave osnovne škole	Istraživanje se odnosi na djecu predškolskog uzrasta, učenike u sekundarnom i studente u postsekundarnom obrazovanju
Eksperimentalna (<i>randomized controlled trial</i> – RCT) i kvaziekperimentalna istraživanja koja su usredotočena na matematička postignuća učenika razredne nastave	Neeksperimentalno istraživanje ili eksperiment bez kontrolne skupine, odnosno istraživanja koja nisu usmjerena na matematička postignuća učenika
Detaljno je opisan program intervencije nastave matematike	Nema dovoljno informacija o programu intervencije u nastavu matematike
Istraživanja s najmanje 2 učitelja i 30 učenika u eksperimentalnoj i kontrolnoj skupini	U eksperimentalnoj i kontrolnoj skupini je jedan učitelj ili je uzorak učenika manji od 30
Studije uključuju kvantitativne rezultate postignuća učenika iz matematike dobivene na temelju provedenog predtesta i posttesta i iz kojih je moguće izračunati veličine efekta učinka ili je on već izračunat	Studije uključuju samo kvalitativne podatke ili kvantitativne podatke iz kojih se ne može izračunati efekt učinka
Veličina učinka je pozitivna i statistički značajna	Veličina učinka nije pozitivna ili nije statistički značajna
Intervencije traju najmanje 8 tjedana	Intervencije traju manje od 8 tjedana
Istraživanje je objavljeno od 2010. do 2019. godine	Istraživanje je objavljeno prije 2010. ili nakon 2019. godine
Istraživanje bi se moglo provesti u bilo kojoj zemlji, ali rad mora biti napisan na engleskom jeziku	Istraživanje nije napisano na engleskom jeziku

Kako bi došli do relevantnih publikacija pretražili smo dostupne znanstvene baze podataka (EBSCO, J-Store i Web of Science) i druge izvore (popisi literature u već provedenim sustavnim pregledima) koristeći ključne riječi (*math, learning, outcome, student, randomized, controlled, trial, experiment, primary school*) i logičke operatore AND i OR (I i ILI). Pri inicijalnom pretraživanju usmjerili smo se na eksperimentalna i kvaziekperimentalna istraživanja. Na temelju sažetaka i ključnih riječi pronađeno je 1858 potencijalnih publikacija.

Za pohranjivanje referenci tih publikacija korištena je besplatna aplikacija Zotero (<https://www.zotero.org>). Za selekciju radova korišten je besplatni program Ryyan (Ouzzani i sur., 2016) u kojem su identificirane relevantne studije na temelju naslova, sažetaka i ključnih riječi. Upotreba ove aplikacije pomogla je u procesu inicijalnog pregleda i odabira studija. Taj pregled rezultirao je izborom 50 radova. U narednom koraku koji je uključivao čitanje cjelovitih radova uz korištenje kriterija za uključivanje i isključivanje (tablica 3) korištena je *online* aplikacija EPPI-Reviewer 4 (<https://eppi.ioe.ac.uk/EPPIReviewer-Web>).

U analizu su uključena eksperimentalna i kvaziekperimentalna istraživanja koja pokazuju pozitivne rezultate učenja učenika iz matematike. Istraživanja su objavljena u periodu od deset godina te su se odnosila na primarno obrazovanje učenika razredne nastave. Iz analize su isključene studije koje nisu empirijska istraživanja, koja nisu provedena u nastavi matematike, nemaju rezultate učenja učenika iz matematike, ne opisuju značajke nastave matematike ili nisu fokusirane na razrednu nastavu. To je rezultiralo izborom 20 publikacija⁹ (tablica 4).

Većina studija provedena je u SAD-u (11), zatim u Nizozemskoj (4), Engleskoj (3), po jedno u Turskoj i Taiwanu. S obzirom na vrijeme objave, većina studija (15) provedena je u razdoblju od 2010. do 2015., a ostalih pet (5) studija između 2015. i 2019. godine.

⁹ Dva rada donose rezultate iste intervencije tako da je u analizu uključeno ukupno 19 različitih programa.

Tablica 4. Popis istraživanja u kojima značajke učinkovite nastave imaju pozitivan učinak na rezultate učenja učenika iz matematike

Naziv programa, naziv na engleskom (Referenca)	Država / trajanje	Cilj istraživanja	Uzorak	Vrsta istraživanja, vrsta mjernog instrumenta / efekt učinka ¹⁰ (statistička značajnost)
1. Matematičke mini igre, <i>Mini game</i> (Bakker i sur., 2015)	Nizozemska, 2 godine	Istraživanje učinka mini matematičkih igara na sposobnost rasuđivanja učenika	6.–8. godina, 2. i 3. razred, (392E, 327K) – 719 učenika, 35 škola	Eksperimentalno istraživanje, istraživački instrument / 0,35 (p < 0,05)
2. Metakognitivni program za rješavanje problema s riječima, <i>A Metacognitive Computer Programme for Word Problem Solving</i> (de Kock i Harskamp, 2014)	Nizozemska, 10 tjedana	Ispitivanje učinkovitosti rješavanja matematičkih problema s riječima korištenjem računalnog programa	18 odjeljenja 5. razreda iz 12 osnovnih škola, 18 učitelja i 390 učenika (280E, 110K)	Kvaziekperimentalno, istraživanje, istraživački instrument / efekt učinka za analizu problema zadanih riječima: 0,23 (p = 0,023), efekt učinka za rješavanje problema s riječima: 0,27 (p = 0,009)
3. Matematika u fokusu, <i>Math in Focus</i> (Educational Research Institute of America, ERIA, 2010 i 2017)	SAD, 1 godina	Ispitivanje učinka programa Math in Focus (Matematika u fokusu) na postignuća učenika iz matematike	4. razred: 678 učenika (125E, 553K)	Kvaziekperimentalno istraživanje, istraživački instrument / 0,26* (p < 0,0001)
			3. razred: 460 učenika (230E, 230K)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani instrument /
			4.razred: 474 učenika (237E, 237K) 5. razred: 425 učenika (213E, 212K)	3. r.: 1,50 (p < 0,0001) 4. r.: 1,66 (p < 0,0001) 5. r.: 1,28 (p < 0,0001)

¹⁰ U tablici su navedene vrijednosti Cohenovog d-indeksa.

Naziv programa, naziv na engleskom (Referenca)	Država / trajanje	Cilj istraživanja	Uzorak	Vrsta istraživanja, vrsta mjernog instrumenta / efekta učinka ¹⁰ (statistička značajnost)
4. Učenje s mozgom na umu, <i>Brain Based Learning</i> , (Erol i Karaduman, 2018)	Turska, tri i pol mjeseca	Utvrđivanje učinka modela učenja Učenje s mozgom na umu u nastavnim aktivnostima na uspjeh učenika iz matematike	4. razred: 91 učenik (46E, 45K)	Eksperiment, istraživački instrument / 2,52* (p < 0,01)
5. Digitalni alat za formativno vrednovanje Snappet, <i>A Digital Formative Assessment Tool Called Snappet</i> (Faber i sur., 2017)	Nizozemska, 5 mjeseci	Ispitivanje učinka digitalnog alata Snappet za procjenu koji pruža formativne povratne informacije na postignuća učenika iz matematike	3. razred, 79 škola, 1808 učenika (833E, 986K)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani test / 0,43* (p < 0,01)
6. Gusarska matematika, <i>Pirate Math</i> , (Fuchs i sur., 2010)	SAD, 16 tjedana	Procjenjivanje učinka programa Gusarske matematike u nastavi matematike s vježbom i bez nje na postignuća učenika s teškoćama u usvajanju nastavnih sadržaja	3. razred, 150 učenika (51E ₁ , 49E ₂ , 50K)	Eksperimentalno istraživanje, istraživački instrument / uz vježbu: 0,67 (p < 0,003) bez vježbe: 0,43 (p < 0,003)
7. Galaktička matematika, <i>Galaxy Math</i> (Fuchs i sur., 2013)	SAD, 16 tjedana	Utvrđivanje učinkovitosti tutorskog poučavanja učenika s teškoćama (jedan učitelj na jednog učenika) uz (ne)ubrzanu praksu	1. razred, 591 učenika (195Es, 190Ens, 206K)	Eksperimentalno istraživanje, istraživački instrument / ubrzana praksa: 0,87 (p < 0,001) neubrzana praksa: 0,07 (p < 0,001)
8. Sučeljavanje s razlomcima, <i>Fraction Face off</i> (Fuchs i sur., 2016)	SAD, 12 tjedana	Procjena učinka intervencije poučavanja razlomaka na postignuća učenika s poteškoćama u nastavi iz matematike	4. razred, 218 učenika (147E, 71K)	Eksperimentalno istraživanje, državni test / od 0,78 do 2,87 (p < 0,01)
9. Brojčane rakete, <i>Number Rockets</i> (Gersten i sur., 2015)	SAD, 6 mjeseci	Proširivanje rezultata i replikacija već provedenog istraživanja primjenom intervencije Number Rockets	1. razred, 76 škola, 994 učenika (615E, 379C)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani instrument / 0,34 (p < 0,001)

Naziv programa, naziv na engleskom (Referenca)	Država / trajanje	Cilj istraživanja	Uzorak	Vrsta istraživanja, vrsta mjernog instrumenta / efekt učinka ¹⁰ (statistička značajnost)
10. Privremeno vrednovanje pomoću programa Acuity, <i>Acuity Interim Assessments</i> (Konstantopoulos i sur., 2013)	SAD, 1 godina	Ispitivanje procjene utjecaja matematičkog programa Acuity na postignuća učenika iz matematike	3.–6. razred, 57 škola, 11 632 učenika	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani državni instrument / 0,19 ($p < 0,05$)
11. Inspirativna matematika, <i>Inspire Maths</i> (Lindorff i sur., 2019)	Engleska, 1 godina	Ispitivanje postignuća, napretka i stavova učenika, učiteljske prakse i percepcije te iskustva učitelja u nastavi matematike primjenom Inspire Maths udžbenika koji se temelje na singapurskom modelu	1. razred, 12 škola, 576 učenika	Eksperimentalno istraživanje, istraživački instrument / 0,42 ($p = 0,046$).
12. Modificirana aritmetička praksa, <i>Modified Arithmetic Practice</i> (McNeil i sur., 2015)	SAD, 12 tjedana	Testiranje modificirane inačice aritmetičke prakse pri konstruiranju boljeg razumijevanja matematičke jednadžbe	2. razred, 166 učenika (83E, 83K)	Kvaziekperimentalno istraživanje, istraživački instrument / 0,37 ($p = 0,004$)
13. Fizički aktivan i akademski umještan u školi, <i>Fit and Academically Proficient at School</i> (Mullender-Wijnsma i sur., 2015)	Nizozemska, 2 godine	Istraživanje učinka fizičke aktivnosti na postignuća učenika iz matematike	2. i 3. razred, 12 škola, 499 učenika (249E, 250K)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani test / 0,42 ($p < 0,01$)
14. Uхвати račun, <i>Catch Up® Numeracy</i> (Rutt i sur., 2014)	Engleska, 30 tjedana	Identifikacija utjecaja intervencije Uхвати račun na postignuća učenika s poteškoćama iz matematike koja se temelji na pristupu jedan učitelj na jednog učenika	2.–6. razred, 224 učenika, (112E, 112KC)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani test / 0,21 ($p = 0,05$)

Naziv programa, naziv na engleskom (Referenca)	Država / trajanje	Cilj istraživanja	Uzorak	Vrsta istraživanja, vrsta mjernog instrumenta / efekt učinka ¹⁰ (statistička značajnost)
15. Matematički oporavak, <i>Mathematics Recovery</i> (Smith i sur., 2013)	SAD, 1 godina	Ispitivanje učinka intervencije Matematički oporavak na rezultate učenja učenika s poteškoćama iz matematike koja se temelji na pristupu jedan učitelj na jednog učenika	1. razred, 20 osnovnih škola, 18 učitelja, 759 učenika	Kvaziekperimentalno istraživanje, istraživački instrument / 1,04 (p < 0,001)
16. Matematika u fokusu, <i>Focus Math</i> (Styers & Baird-Wilkerson, 2011)	1 godina	Procjenjivanje utjecaja intervencije Focus Math u svrhu razvijanja matematičkih vještina učenika te procjena učiteljeve primjene programa na učenike	3. i 5. razred, 357 učenika (174E, 184K)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani instrument / 0,24 (p < 0,001)
17. Brojenje brojeva, <i>Numbers Count</i> (Torgerson i sur., 2013)	Engleska, 12 tjedana	Procjena učinka intervencije programa Brojenje brojeva s ciljem učeničkog boljeg razumijevanja znanja o brojevima	1. razred, 504 učenika, (175E, 329K)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani instrument / 0,33 (p = 0,05)
18. Višekorisnički sustav za vršnjačko poučavanje G-matematika, <i>Multi-user G-Math Peer Tutoring System</i> (Tsuei, 2012)	Taiwan, 2 polugodišta	Istraživanje djelotvornosti vršnjačkog poučavanja pomoću višekorisničkog tutorskog sustava G-matematika	3. i 4. razred, 88 učenika, (57E, 31K)	Kvaziekperimentalno istraživanje, istraživački test / 0,79* (p < 0,001)
19. Matematika i zaključivanje, <i>Mathematics and Reasoning</i> (Worth i sur., 2016)	Engleska, 10–12 tjedana	Ispitivanje razvijanja učeničkog razumijevanja logičkih principa u matematici primjenom programa Matematika i zaključivanje	2. razred, 36 škola, 1365 učenika (517E, 848K)	Eksperimentalno istraživanje, standardizirani instrument / 0,20 (p = 0,05)
* Ako u radu nije navedena vrijednost Cohnovog d-indeksa ona je izračunata na temelju dostupnih rezultata pomoću jednog od dva <i>online</i> kalkulatora (https://www.psychometrica.de/effect_size.html ili https://www.campbellcollaboration.org/escalc/html/EffectSizeCalculator-SMD-main.php).				

4.2. Kvalitativna analiza podataka

Kvalitativni podatci mogu se dobiti studijem slučaja, biografskom metodom, analizom sadržaja različitih tekstova i dokumenata, intervjuiranjem te sudjelovanjem u akcijskom istraživanju. Takvi podatci zahtijevaju kvalitativnu analizu koja omogućuje bolje razumijevanje fenomena koji je predmet istraživanja.

Kvalitativnu analizu mogli bismo definirati kao spoznajni proces u toku kojeg otkrivamo i utvrđujemo postojanja određenih kvalitativnih svojstava predmeta i pojava po kojim se oni razlikuju od drugih predmeta i pojava (iako im mogu biti manje više slični). Glavni postupci kojima se služimo u ovoj vrsti analize jesu komparacija i diferencijacija različitih svojstava istih predmeta ili pojava, odnosno istih svojstava različitih pojava, a njezini glavni rezultati jesu deskripcija, klasifikacija i definicija tih objekata analize. (Zvonarević, 1976, str. 174, citirano u Bognar i Matijević, 2005, str. 87)

Prema Milesu i Hubermanu (2014) kvalitativna analiza obuhvaća:

1. *Redukciju podataka* – nije odvojena od analize već je njezin sastavni dio. Podrazumijeva izdvajanje podataka na bitno prema onome što se istražuje, a uz apstrahiranje, eliminiranje onoga što nije relevantno. Bitni se podatci označavaju, ispisuju u pripremljene obrasce, unose u memoriju računala itd. Kvalitativni podatci mogu biti reducirani odabirom, sažimanjem ili parafraziranjem, razvrstavanjem u veće cjeline itd. Ponekad je potrebno pretvoriti podatke u kvantitativne veličine premda to nije uvijek potrebno (Miles i Huberman, 2014, str. 31).
2. *Sređivanje podataka* predstavlja organiziran komprimiran sklop informacija koji omogućuje izvlačenje zaključaka. Sređivanjem se bitni podatci svrstavaju u odgovarajuće kategorije.
3. *Izvođenje zaključaka* – provodi se na temelju sređenih podataka. Završni je postupak u analizi usmjeren na pridavanje smisla podacima i njihovu tumačenju, poprima oblik usporedbe, uočavanje obrazaca ili tema u vezi s istraživanom pojavom (Milas, 2005).

Konačni zaključci možda se neće pojaviti dok se prikupljanje podataka ne završi, ovisno o obimu terenskih bilješki; korištene metode kodiranja, pohrane i pretraživanja te vještine i iskustva istraživača. Sažimanje podataka, prikaz podataka i zaključivanje tijekom i nakon prikupljanja podataka u paralelnom obliku, čine opću domenu koja se naziva „analiza“. Tri vrste aktivnosti analize i sama aktivnost prikupljanja podataka tvori interaktivni, ciklički proces. Kodiranje podataka (sažimanje podataka) dovodi do novih ideja o tome što bi trebalo ući u matricu (prikaz podataka). Kvalitativna analiza mora biti dobro dokumentirana kao proces kako bi nam pomogla pri učenju (Miles i Huberman, 2014).

Kvalitativna analiza obavlja se još dok traje prikupljanje podataka koje može preusmjeriti istraživačku pozornost na neka zanemarena pitanja, ispravljajući time propuste u konceptualizaciji, ponekad čak i mijenjanjem instrumentarija. Analiza unutar slučaja obuhvaća dvije razine razumijevanja: opisnu i eksplanatornu. Prva razina bavi se pitanjem: „Što i kako se zbiva?“ Proučavana pojava nastoji se spoznati pojednostavljenjem i sažimanjem na sastavnice. Sljedeća razina pruža valjano objašnjenje i odgovara na pitanje: „Zašto dolazi do nečega?“ pružajući teorijski okvir s jasno naznačenim odnosima među varijablama.

Analizom između slučajeva nastoje se očuvati jedinstvenosti svakog slučaja i njihove individualne povijesti, ali i oprezno sučeliti kako bi se došlo do spoznaje o procesima koji su im možda zajednički (Milas, 2005, str. 606). Zaključivanje u kvalitativnoj analizi zasniva se na velikom broju postupaka koje se naziva taktikom izvlačenja smisla (Milas, 2005, str. 607).

4.3. Kodiranje i analiza

Nakon izdvajanja odgovarajućih podataka iz publikacija, proveden je postupak kodiranja. Prema Bazeley (2013) kodiranje je temeljna aktivnost kvalitativne analize, služi kao alat za ispitivanje podataka te ima ulogu testiranja pretpostavki i zaključaka. Tijekom kodiranja potrebno je označiti odgovarajući dio teksta s kodom u odabranom odlomku. Oznaka (kód) se koristi i za predstavljanje i za pristup odgovarajućim podacima. Prema Gough, Oliver i Thomas (2012) dobro definirani skup kodova presudan je za analizu izabranih radova u sustavnom pregledu literature. Odluka o odabiru niza kodova pomaže istraživačima potražiti ključni aspekt svake studije na sustavan način. Kodiranje se odvija kroz dvije glavne faze: početne faze identificiranja i označavanja i tumačenje za razvoj više analitičkih kategorija ili klastera. Kako bi se neka ideja razvila potrebno je koristiti različite vrste kodova. Oni su vlastite kreacije istraživača jer ih sami identificiraju i odabiru te su alati za daljnje promišljanje. Mogu se proširiti, promijeniti ili u potpunosti ukinuti kako se naše ideje razvijaju kroz ponovljene interakcije s podacima.

Kodiranje pomaže u pronalaženju podataka, služi kao način sortiranja prijepisa, dokumenata, slika, ideja. Dodjeljivanjem određenih kategorija sličnim sadržajima, možemo dobiti uvid u sve što je napisano o određenoj temi, a da se pritom ne mora pregledavati svaki od izvora. Kada se podatci kodiraju, moguće je postavljati pitanja u vezi s kodiranim podacima. Također je dobro voditi i bilješke o odlukama koje se donose pri kodiranju (Bazeley, 2013). Bazeley (2013) razlikuje sljedeće strategije kodiranja:

- a) *Olovka – papir*: Povijesno gledajući istraživači su se oslanjali na ovaj pristup jer je nekima od njih taktilni kontakt s papirom važan, kao i njihova sposobnost baratanja s podacima koji ih okružuju dajući im osjećaj fizičkog rukovanja i žongliranja riječima ili slikama kao i osjećaj razumijevanja cjeline slika.
- b) *Snimanje kodova*: Potrebno je snimiti kôd, popraćen odgovarajućim sekvencijskim brojem za prepoznavanje.
- c) *Korištenje računala za kodiranje*: Korištenjem računalnog softvera, posebno programa razvijenih za analizu kvalitativnih podataka, pružaju nam se prednosti indeksiranja/označavanja i sortiranja opisanih pristupa s mnogo većom fleksibilnošću i brzinom; računalno kodiranje kvalitativnih podataka potencijalno je složenije i detaljnije nego ručno tematsko sortiranje (Bazeley, 2013).

Kodiranje je samo jedan dio procesa kvalitativne analize i služi za povezivanje ili testiranje povezanih ideja kako bi izgradili smislenu teoriju. Prema Gough, Oliver i Thomas (2012) u sustavnim pregledima postoje dva ključna principa:

- 1) kodovi i kodiranje samo su jedan dio procesa kvalitativne analize i ne mogu postojati izolirano
- 2) kodove kasnije treba koristiti za povezivanje ili testiranje povezanih ideja kako bi izgradili smislenu sliku riječi ili teoriju.

Nadalje Gough, Oliver i Thomas (2012) također ističu važnost induktivnog pristupa analizi. Iako se neki važni koncepti mogu unaprijed prepoznati, mnogi koncepti mogu proizaći iz procesa analize studija. Pristup kodiranju u kojem su otvorena pitanja i odgovori omogućuje nove spoznaje i razumijevanja koja proizlaze iz podataka. Dakle, moguće je krenuti od unaprijed definirane kategorije, ali neke se mogu javiti i naknadno.

Gough i sur. (2012) ističu kako je pri kodiranju potrebno kategorije (ili šifre) jednoznačno definirati i dosljedno primjenjivati. U ovom istraživanju kodiranje je ostvareno pomoću unaprijed definiranih kategorija koje su se odnosile na značajke kvalitetne nastave matematike: uvažavanje učeničkog predznanja, korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, višestruko prikazivanje i povezivanje matematičkih sadržaja, vođenje smislene matematičke rasprave, izlaganje učenika uobičajenim pogrešnim matematičkim predodžbama i pogreškama, diferencirana nastava, izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja, korištenje tehnologije, suradničko učenje, povratne informacije (Jukić Matić i sur., 2020). Prisutnost pojedinih kategorija u analiziranim radovima prikazana je u tablici 3.

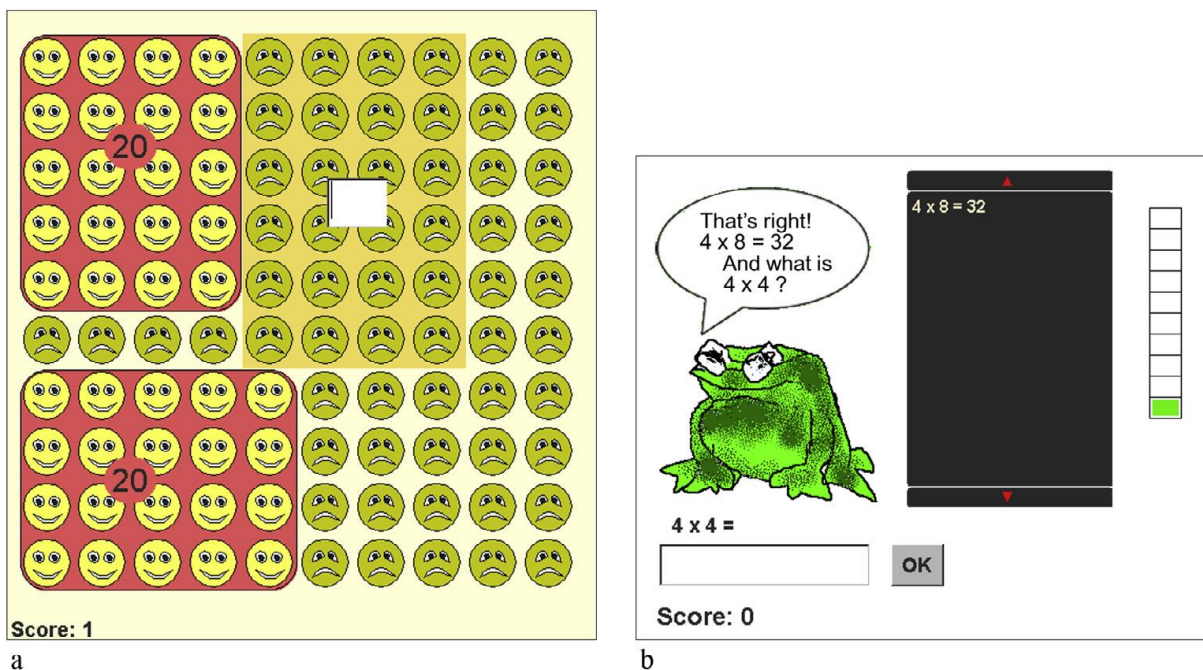
Za kodiranje je korišten EPPI-Reviewer 4 softver za sve vrste pregleda literature, uključujući sustavne preglede, metaanalize, „narrativne“ recenzije i metaetnografije (<https://epi.ioe.ac.uk/EPPIReviewer-Web/home>). Prema Gough, Oliver i Thomas (2012) u pregledima EPPI-centra postoje dva ključna principa:

- a) prosudbe o kvaliteti i relevantnosti istraživanja koje se uvijek donose u odnosu na određeno istraživačko pitanje
- b) korišteni kriteriji i metode koji trebaju biti što eksplicitniji kako bi čitatelji sustavnog pregleda mogli razumjeti i procijeniti kako su prosudbe o kvaliteti i relevantnosti donesene.

4.4. Pregled učinkovitih intervencija s pozitivnim učinkom na rezultate učenika iz matematike

Ovo poglavlje donosi opis intervencija kod kojih je utvrđen pozitivan učinak na učenička postignuća iz matematike. Opisane intervencije pomažu učiteljima i učenicima u nastavi predstavljajući matematiku na smislen, privlačan, zabavan i interaktivan način. Učenici uče vlastitim tempom formulirajući, modelirajući i ispitujući različite pristupe rješavanja problemskih zadataka iz matematike te unapređujući konceptualno razumijevanje.

Kod *Matematičkih mini igara* (*Mini game*, Bakker i sur., 2015) važnu ulogu imaju povratne informacije. Naime, one odmah nakon rješavanja zadatka informiraju učenike o točnosti ili netočnosti njihovih rješenja (slika 15). Osim toga, omogućuju učenicima bezrizično sudjelovanje. Mini igre su lako dostupne, traju kratko i mogu se više puta ponavljati. Za utvrđivanje učinkovitosti mini igara provedeno je eksperimentalno istraživanje u Nizozemskoj. Korišten je istraživački instrument kako bi se istražio učinak mini igara na rasuđivanje učenika drugog i trećeg razreda. Sudjelovalo je ukupno 719 učenika, a efekt učinka intervencije je pozitivan i iznosi 0,35. Najveća postignuća ostvarili su učenici koji su koristili mini igre kod kuće nakon čega su u školi razgovarali o njihovu učinku (Bakker i sur., 2015). Također, Bakker i sur. (2015) pretpostavljaju kako je količina uloženog vremena i truda na mini igre možda važan prediktor za njihove ishode učenja.




Slika 15. Primjer zadatka u mini igri korištenoj u eksperimentalnom istraživanju (Bakker i sur., 2015, str. 60)

Metakognitivni računalni program (Metacognitive Computer Programme for Word Problem Solving, de Kock i Harskamp, 2014) usmjeren je na poboljšavanje vještine rješavanja problemskih zadataka kod učenika. de Kock i Harskamp (2014) ističu kako učitelji u osnovnom obrazovanju imaju poteškoća poučavajući učenike problemskim zadacima riječima u nastavi matematike. Zbog toga su u Nizozemskoj proveli kvaziekperimentalno istraživanje kako bi ispitali učinkovitost *online* aplikacije namijenjene unapređenju vještine rješavanja matematičkih problema učenika petih razreda iz 12 osnovnih škola.

Problemski zadatci s riječima podijeljeni su prema razinama težine: 1) lagani, 2) umjereno lagani i 3) teški. Tijekom intervencije svaka cjelina uključivala je 80 novih problemskih zadataka s riječima. Razina težine zadataka temeljile su se na broju rečenica u zadacima, broju koraka koji su korišteni pri računanju, te broju suvišnih informacija koje su uključene u problemske zadatke. Kako bi riješili problemske zadatke učenici su morali primijeniti zbrajanje, oduzimanje, množenje ili dijeljenje s razlomcima, postotcima, računanje s decimalnim brojevima. Svaka jedinica sadrži osam zadataka s riječima koje je potrebno riješiti u roku od 20 minuta. Učenici su tijekom rješavanja zadataka mogli koristiti metakognitivne upute (slika 16).


Time remaining for this lesson: 19:55 Problem-Solving Hints Logged in as: test Log out

Newspaper delivery



Dylan is a paperboy.
He delivers 120 newspapers each day.
On Wednesday he fell ill.
He has delivered three eighth part of the papers.
The remaining newspapers were delivered by his friend Noah.
How many newspapers has Noah delivered? newspapers

The Task Stairs



I read carefully

120 newspapers

Dylan Noah

delivered $\frac{3}{8}$ part delivered ? papers

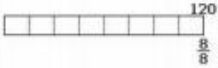
Dylan has delivered three eighth part.
Noah has delivered an unknown part.
What is the question you have to answer?

I know this type of problem

Dylan Noah
delivered $\frac{3}{8}$ part deliver $\frac{?}{8}$ part = ? papers

The total amount of papers is 120.
Dylan delivered three eighth part.
Noah has to deliver the other part.
First, you can calculate how large this part is.
What type of calculation can you do?

I make a plan



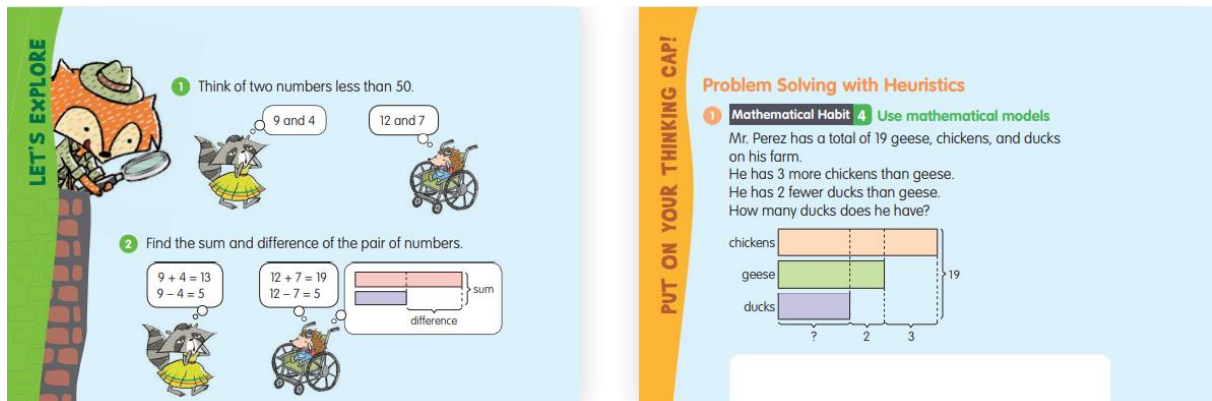
The value of the whole strip is 120.
The strip is divided into 8 smaller blocks.
You know that Dylan delivered three eighth part.
Can you solve the problem?
Use scrap paper for your calculation.

Slika 16. Primjer problemskog zadatka s metakognitivnim uputama u obliku stubišta prikazanog pomoću računalnog programa (de Kock i Harskamp, 2014, str. 236)

Metakognitivne upute bile su prikazane u obliku stubišta sa sljedećim koracima: 1. pažljivo čitam; 2. upoznajem vrstu problema; 3. stvaram plan; 4. provjeravam svoj odgovor; 5. provjeravam što sam naučio. Koraci predstavljaju poticaje za sustavno rješavanje problemskih zadataka riječima. Savjeti su učenicima prezentirani u obliku neformalnog razgovora. Učenici sami izabiru savjete koje žele koristiti. Računalni program bio je integriran u svakodnevne sadržaje nastave matematike i povezan je s udžbenicima iz matematike (de Kock i Harskamp 2014). Intervencija je primjenom istraživačkog instrumenta pokazala statistički značajnu učinkovitost s pozitivnim efektom učinka od 0,23 za analizu problema zadanih riječima te 0,27 za rješavanje problema s riječima.

Matematika u fokusu (*Math in Focus*, ERIA, 2010, 2017) predstavlja primjenu singapurskog modela u kojemu je rješavanje problema postavljeno u fokus nastave matematike (slika 17). Matematika u fokusu nudi cjelovito okruženje za *online* poučavanje i učenje učenika od prvog do petog razreda pružajući im kontinuirano mogućnosti komunikacije i razmišljanja o matematici. Učeci u parovima ili malim grupama učenici mogu iznositi svoja razmišljanja i

svoje razumijevanje pojmova koji su im predstavljeni. Svako novo poglavlje ovog programa sadrži aktivnosti koje polaze od učeničkog predznanja potrebnog za izgradnju novih koncepata. Matematika u fokusu nudi različite materijale za učenike koji postižu lošije rezultate, ali isto tako materijale za prosječne učenike i za darovite učenike. Time se ostvaruje diferencijacija u nastavi matematike. Program potiče divergentno mišljenje i rješavanje problema u skladu s NCTM standardima.



Slika 17. Primjeri računalnog programa Matematika koji potiče učenike na raspravu tijekom rješavanja problemskih zadataka (Cavendish, 2020, str. 13)

Američki institut za obrazovna istraživanja (Educational Research Institute of America, ERIA) 2010. godine proveo je kvaziekperimentalno istraživanje u SAD-u kako bi ispitali učinak programa Matematika u fokusu na postignuća učenika četvrtog razreda. Primjenom istraživačkog instrumenta utvrđen je statistički značajan pozitivan efekt koji iznosi 0,26, (ERIA, 2010). Nadalje, 2017. godine provedeno je eksperimentalno istraživanje u SAD-u kako bi ispitali učinak programa matematike u fokusu na postignuća učenika trećeg, četvrtog i petog razreda. U istraživanju je korišten standardiziran instrument. Utvrđeni su veliki pozitivni efekti učinka. Za treći razred efekt učinka iznosi 1,50, za četvrti razred 1,66 i za peti razred 1,28 (ERIA, 2017).

Učenje s mozgom na umu (Brain based learning, Erol i Karaduman, 2018) odnosi se na uvođenje nastavnih metoda u skladu s najnovijim neuroznanstvenim istraživanjima funkcioniranja mozga tijekom procesa učenja i rezultatima istraživanja kognitivnog razvoja. Svaki učenik razlikuje se prema načinu učenja, stoga je važno koristiti različite strategije. Strategije učenja temeljene na mozgu potiču učenje, zadržavanje informacija i fokusiranost na

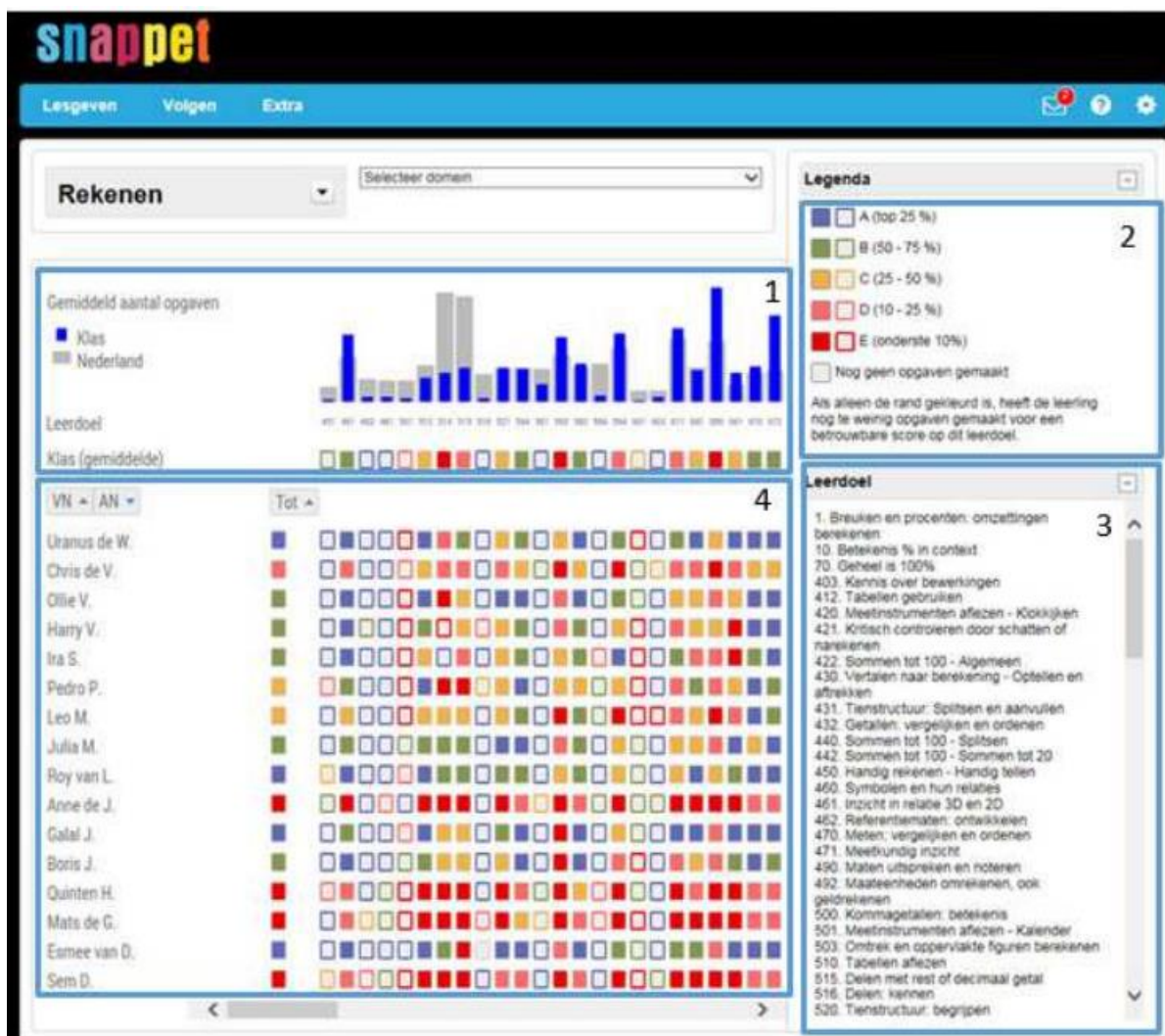
rješavanje zadataka. Potrebno je stvoriti pozitivno okruženje u učionici kako bi se učenici osjećali ohrabreno i kako bi im se pomoglo u kvalitetnom učenju. Nadalje, potrebno je razgovarati o pojmovima koje su naučili jer je veća vjerojatnost da će na taj način zadržati informacije. Ostvarivanjem aktivnosti pod nazivom „okreni se i razgovaraj“ učenicima se pruža pomoć u nastavi razgovorom o idejama i razjašnjavanjem problema koje bi mogli imati tijekom učenja (Teacher Toolkit, 2017, <https://youtu.be/F5TmrnojNf4>). Također se naglašava kako je potrebno uključiti i vizualne elemente učenja. Većina učenika (65 %) uči vizualno pa je zbog toga u nastavu korisno unijeti vizualne predmete i plakate kako bi im se omogućilo bolje pamćenje. Veće dijelove teksta potrebno je rastaviti na manje cjeline jer na taj način pomažemo učenicima u prepoznavanju ključnih riječi i fraza te u parafraziranju tekstova vlastitim riječima. Na kraju je potrebno učenike potaknuti na kretanje jer dulje vrijeme sjedenja u učionici može izazvati pad koncentracije kod učenika. Prema Erol i Karaduman (2018) matematika je izravno povezana s mogućnošću rasuđivanja i razmišljanja tijekom računanja. Učinkovitost primjene modela učenja temeljenog na studijama razvoja mozga u nastavi matematike ispitana je u eksperimentalnom istraživanju koje su proveli Erol i Karaduman (2015) u Turskoj. U programu su korištene matematičke igre zbrajanja, oduzimanja, množenja primjerene učenicima četvrtih razreda. U tom istraživanju sudjelovao je 91 učenik četvrtog razreda. Primjenom istraživačkog instrumenta utvrđen je visoko pozitivan efekt od 2,50.

Snappet (Faber i sur., 2017) je digitalni alat za formativno vrednovanje koji omogućuje učenicima rad na zadacima iz matematike (slika 18). Ti su zadatci prilagođeni njihovim potrebama i sposobnostima (Faber i sur., 2017). On pruža povratne informacije učiteljima i učenicima. Učenici dobivaju zadatke putem zaslona ekrana i primaju jednostavne povratne informacije odmah nakon dovršetka zadataka. Povratne informacije uključuju komentar učenicima o točnosti njihova odgovora (zeleni krivulja) ili netočnosti (crvena linija). Tijekom nastave učenici prvo rješavaju sve zadatke predviđene kurikulumom za taj nastavni sat, a zatim im se dodjeljuju zadatci koji su predviđeni za njihovu razinu sposobnosti. Učitelji prate napredak učenika na nadzornoj ploči. To učiteljima omogućuje praćenje napretka pojedinog učenika ili cijelog razreda pružajući im informacije o napretku i realizaciji određenog cilja učenja (slika 19). Učitelji također mogu koristiti videozapise s uputama. Faber i sur. (2017) proveli su eksperimentalno istraživanje u Nizozemskoj kojim su nastojali utvrditi učinak digitalnog alata Snappet na postignuća učenika iz matematike. Sudjelovalo je ukupno 1808 učenika drugog razreda. Korištenjem standardiziranog testa utvrđen je pozitivan efekt učinka

od 0,43. Dakle, učenici koji su koristili digitalni alat Snappet pokazali su veća postignuća od učenika koji ga nisu koristili.



Slika 18. Primjer matematičkog zadatka zbrajanja brojeva na nizozemskom jeziku u alatu Snappet: „zbroji sljedeće brojeve: $3 + 5 + 7$ “ (Faber i sur., 2017, str. 41)





Slika 19. Primjer nadzorne ploče napretka razreda alata Snappet (Faber i sur., 2017, str. 42)

Gusarska matematika (*Pirate Math*, Fuchs i sur., 2010) je program za učenje rješavanja zadataka riječima iz matematike. Taj se program u intervenciji koju su proveli Fuchs i sur. (2010) primjenjivao tri puta tjedno u sesijama od 20–30 minuta u trajanju od 16 tjedana. Program je osmislila Lynn Fuchs na sveučilištu Vanderbilt. To je program čija je funkcija poboljšati vještine rješavanja matematičkih zadataka učenika osnovnoškolske dobi. Trenutno su u upotrebi verzije programa gusarske matematike za učenike drugog i trećeg razreda. Učitelji tijekom poduke svih učenika koriste plakate s vizualnim prikazima zadataka koji su organizirani prema nastavnim ciljevima određene lekcije. Zatim učenici rješavaju zadatke zajedno s učiteljem. Nakon toga se učenici dijele u parove i zajednički vježbaju rješavanje zadataka s riječima (slika 20).

Partner Work

Draw a picture to make the sides the same. Then, write the sentence that matches the picture.

 +  =

$3 + 5 =$

$4 - 3 =$

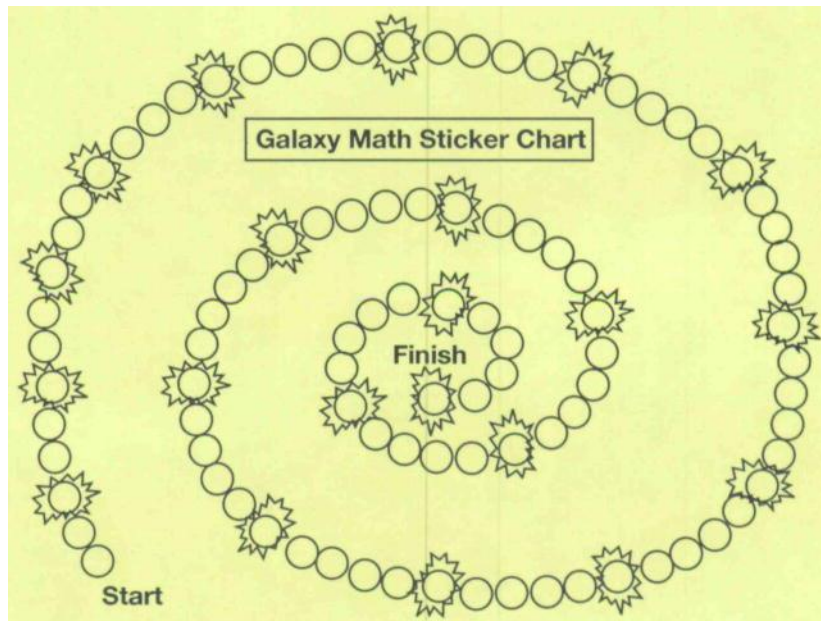
Slika 20. Primjer problemskog zadatka s riječima koji učenici rješavaju u paru (Fuchs i sur., 2017b, str. 63)

Učitelj nadgleda učenike i pruža im po potrebi povratne informacije. Na kraju svaki učenik individualno rješava jednadžbe i zadatke s riječima. Učenici uče i identificiraju konceptualni okvir tri vrste zadataka s riječima: identificiraju i zanemaruju nebitne informacije, rješavaju matematičke jednadžbe i procjenjuju opravdanost riješenih jednadžbi. Učenici uče prepoznavati zadatke s riječima prema njihovu temeljnom konceptualnom okviru i predstavljati problemsku strukturu matematičkom jednadžbom prije njezina rješavanja. Također uče vještine

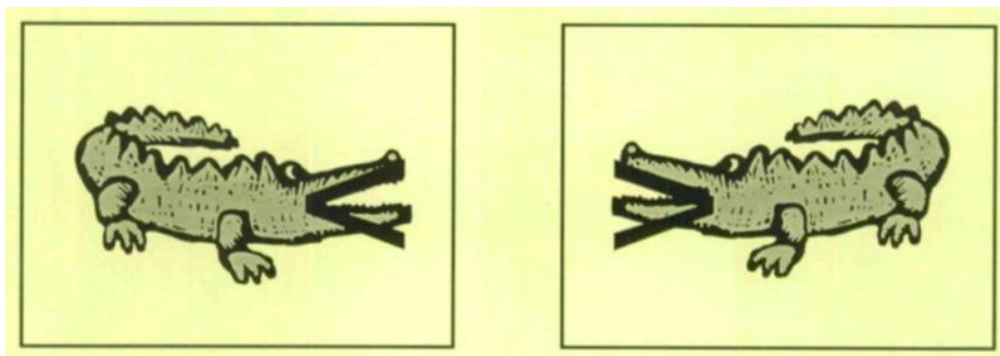
rješavanja zadataka u kojima su navedene nebitne informacije i rješavanje problema s relevantnim informacijama koje se nalaze na grafikonima. U Gusarskoj matematici učenici uče pronaći rješenje baš kao što to gusari rade – pomoću zemljovida tražeći blago – a motivaciju im pružaju i novčići koji simboliziraju blago. Za učenike trećeg razreda predviđeno je pet aktivnosti u svakoj sesiji: kartice s matematičkim činjenicama, zagrijavanje pri rješavanju zadataka s riječima, lekcija s uputama, razvrstavanje karata i gusarski problem. Učenici se oslanjaju na plakate kao pomoćno sredstvo koje im pomaže zapamtiti odgovarajuću jednadžbu i rješenje različitih vrsta zadataka. Fuchs i sur. (2010) u SAD-u su proveli eksperimentalno istraživanje u kojem je sudjelovalo 150 učenika trećeg razreda. Procjenjivali su učinak programa na postignuća učenika s teškoćama u usvajanju nastavnih sadržaja iz matematike. Koristeći istraživački instrument veličina učinka bila je statistički značajna ($p < 0,003$) i pokazala je pozitivne učinke na postignuća učenika u rješavanju zadataka uz vježbu (0,67) i bez vježbe (0,43).

Galaktička matematika (*Galaxy Math*, Fuchs i sur., 2013) i **Brojčane rakete** (*Number Rockets*, Gersten i sur., 2015) su programi namijenjeni povećanju znanja učenika nižih razreda osnovne škole o brojevima. Autorica je obaju programa Lynn Fuchs. To su intervencije u kojima individualno poučavanje ostvaruju učitelji. Pristup učenju temelji se na novim idejama koje moraju biti povezane s djetetovim predznanjem. Učenje se razvija u kontinuitetu od konkretnog do apstraktnog pri čemu se generalizacije temelje na konkretnim iskustvima. Postoji dovoljno zabavnih programa koji poučavaju prepoznavanje brojeva i jednostavne matematičke operacije, ali se zaustavljaju tamo gdje započinju učenikovi problemi. Galaktička matematika započinje tablicama zbrajanja i množenja i jednoznamenkastim operacijama, ali njezin je glavni fokus usmjeren na otklanjanje poteškoća učenika u rješavanju matematičkih problema u više koraka. Autorica programa smatra kako je najbolje učiti u manjim koracima, ali redovito. Čak i deset minuta ili deset problema dnevno poboljšat će učeničko razumijevanje matematike ako se zadatci redovito rješavaju. Kako bi učitelji potaknuli aktivnost učenika program se koristi svemirskim motivima pa je nazvan Galaktička matematika (*Galaxy Math*, slika 21). Intervencija je namijenjena učenicima prvih razreda s poteškoćama u učenju matematike. Tijekom vježbanja prati se napredak učenika. Učenici primaju povratnu informaciju o točnosti svojih rješenja, a znanje jedne lekcije integrira se u segmente iduće lekcije. Sat započinje kratkim individualnim kvizom kako bi se ponovio sadržaj prethodne nastavne jedinice. U intervenciji se vježba zbrajanje i oduzimanje, jednakosti, usporedbe veličina i raspored brojeva na brojevnoj crti. Svaka tema sastoji se od tri redovite lekcije te

jedne do dvije lekcije za učenike koji imaju poteškoće u učenju. Program je osmišljen kako bi spriječio dugoročne poteškoće u matematici uklanjanjem ranih nedostataka (Powell i Fuchs, 2012).



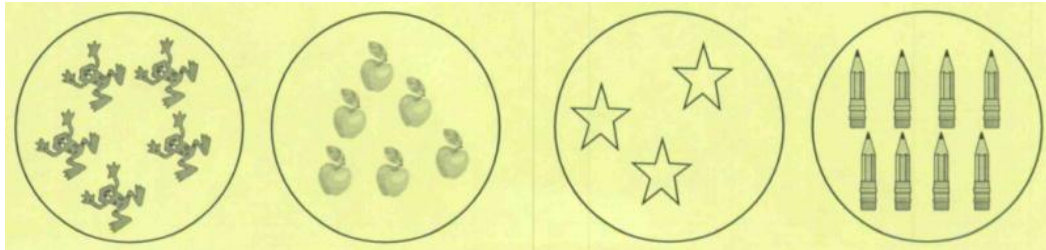
Slika 21. Primjer motivacijske karte s temom galaksija u programu Galaktička matematika (Powell i Fuchs, 2012, str. 9)



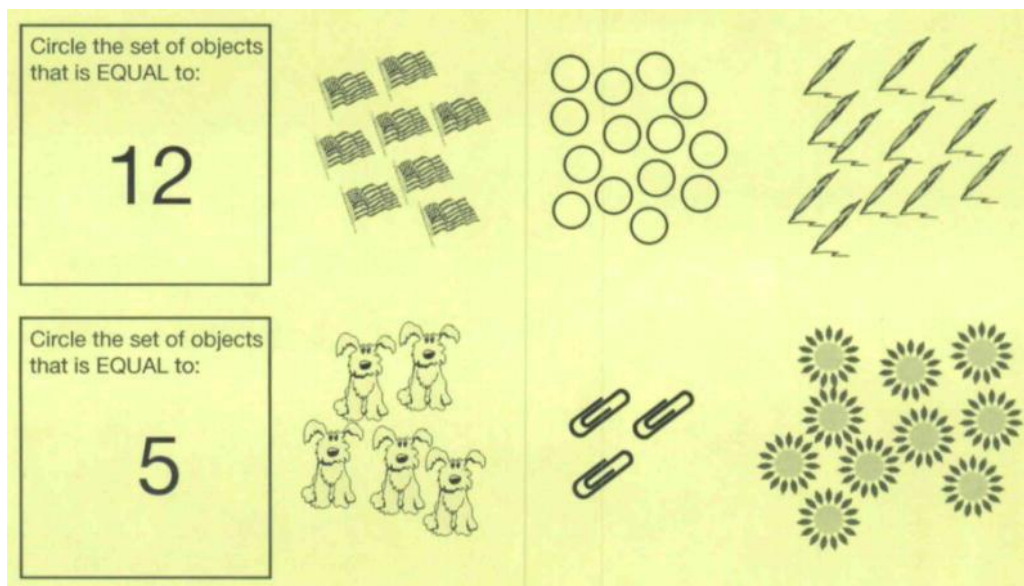
Slika 22. Veliki aligator (Powell i Fuchs, 2012, str. 12)

Učenici se u programu koriste brojevnim crtama i koriste primjer „gospodina Velikog Aligatora“ (slika 22) pri učenju usporedbe brojeva i učenju simbola za veće i manje. Aligator ima širom otvorena usta prekrivena simbolima nejednakosti (tj. znakovima veće ili manje od). Učenicima je objašnjeno da ako je aligator jako gladan želi pojesti veći od dva broja. Zbog toga su otvorena usta uvijek okrenuta prema većem broju.

Slike 23 i 24 primjer su aktivnosti u kojima se uči brojenje i terminologija jednakosti. Ovakve aktivnosti provode se tijekom prvih nekoliko lekcija u Galaktičkoj matematici. Posljednjih deset minuta učenici odrađuju praktični dio sustavno vježbajući zadatke ili igrajući igrice.



Slika 23. Primjer aktivnosti na kojima se uči brojenje (Powell i Fuchs, 2012, str. 11)




Slika 24. Primjer aktivnosti za utvrđivanje jednakosti (Powell i Fuchs, 2012, str. 11)

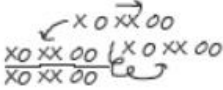
Fuch i sur. (2013) proveli su eksperimentalno istraživanje u kojem je sudjelovao 591 učenik prvog razreda. Koristeći istraživački instrument utvrđen je statistički značajan efekt učinka od 0,87 ($p < 0,001$). Gersten i sur. (2015) potvrdili su rezultate već provedenog eksperimentalnog istraživanja primjenom programa Brojčane rakete koristeći standardizirani instrument s učenicima prvog razreda. Sudjelovalo je ukupno 994 učenika, a rezultati su pokazali statistički značajan pozitivan efekt učinka od 0,34 na postignuća učenika.

Sučeljavanje s razlomcima (*Fraction Face-Off*, Fuchs i sur., 2015) je program koji izgrađuje temelje za razumijevanje razlomaka. U ovoj intervenciji nastavni sadržaji predviđeni su za

učenike četvrtih razreda koji imaju poteškoća s usvajanjem razlomaka. Učenici uče u parovima tri puta tjedno u trajanju od 35 minuta. Intervencija uključuje 36 lekcija tijekom 12 tjedana pri čemu je svaki tjedan usmjeren na specifično znanje i vještine. Pri prezentiranju sadržaja program koristi sportsku temu kako bi povećao interes učenika za matematičke sadržaje. Sve nastavne jedinice razrađene su u obliku skripti koje pomažu učiteljima u poučavanju učenika u malim skupinama (slika 25). Dakle, program daje eksplicitne upute učiteljima za rješavanje različitih zadataka s razlomcima.



DAY 19



Materials

<input type="checkbox"/> Timer	<input type="checkbox"/> R19-A
<input type="checkbox"/> Checkbook	<input type="checkbox"/> IC19-A
<input type="checkbox"/> Fraction Money	<input type="checkbox"/> Fraction $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ pieces of unit, fourths, & fifths pieces
<input type="checkbox"/> Student Banks	<input type="checkbox"/> Yellow Comparing Flashcards for Sprint (see Introduction)
<input type="checkbox"/> WP Warm-Up Worksheet	
<input type="checkbox"/> WP Warm-Up Guide	
<input type="checkbox"/> T19-A	

1

Cards:

C2

NL2

I-M

Review Behavior Expectations: Earning Fraction Money.
Review on an as-needed basis.

Start timer.

ACTIVITY 1: WORD PROBLEM WARM-UP

GROUPING

Manny needs $\frac{1}{3}$ of a quart of potting soil for each plant. He has 7 plants to plant. How many quarts of potting soil will Manny need?

It's time for Word Problem Warm-Up!

Teacher distributes the word problem worksheet to students.


2

Display Word Problem Warm-Up Guide.
See Introduction for Worked Example Template.

FRACTION FACE-OFF • DAY 19 • 237

Slika 25. Primjer popisa materijala koji se koristi tijekom dana i dnevni vodič lekcija u programu Sučeljavanje s razlomcima (Fuchs i sur., 2015, str. 11)

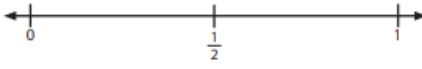
Aktivnosti započinju zagrijavanjem koje podrazumijeva rješavanje problemskih zadataka riječima, tj. ponavljanjem znanja na početku sata. Tom aktivnošću učenici uče rješavati problemske zadatke koji zahtijevaju zaključivanje. Za svaki zadatak učenici dobivaju kopiju zadanog problema u kojoj mogu prikazati rješenje zadatka i postaviti neki drugi problem na isti način. Dakle, učenici rješavaju problemske zadatke koje su već učili. Zatim slijedi igra brzine kojom učenici naizmjenice rješavaju zadatke s razlomcima koje su učili tijekom intervencije. Nakon toga slijedi razvoj fluentnosti računanja razlomaka. Za ovu aktivnost potrebne su izlazne kartice. Učenici pokušavaju nadmašiti svoj rezultat od prethodnog dana. Posljednja aktivnost uključuje pojedinačno natjecanje u kojem učenici individualno popunjavaju radne listove kako bi provjerili svoje razumijevanje pojmova o razlomcima (slika 26).

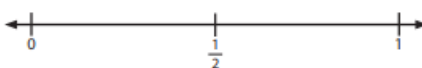



Individual Contest

Place each fraction on the number line.

Day 12

A.  $\frac{1}{5}$

B.  $\frac{3}{12}$

C.  $\frac{1}{6}$

Write <, >, or = in the circle.

A. $\frac{5}{12}$ $\frac{9}{12}$ B. $\frac{6}{8}$ $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$

IC12-A

Slika 26. Primjer zadataka za pojedinačno natjecanje koje učenici samostalno rješavaju (Fuchs i sur., 2015, str. 26)

Za vrijeme natjecanja učenici u timu ili samostalno rješavaju problemske zadatke, ali također i samostalno uče tijekom individualnog natjecanja. Kroz program se učenici tretiraju kao „profesionalni sportaši“ i imaju priliku zarađivati novac u obliku razlomaka koji mogu koristiti za kupnju nagrada po različitim cijenama. Program uključuje učestalo korištenje testova brzine i izlaznih kartica. Od učenika se zahtijeva da u grupi obrazlože znanja o razlomcima. Eksperimentalnim istraživanjem koje su proveli Fuchs i sur. (2016) korištenjem državnog testa NAEP nastojalo se procijeniti učinak intervencije na postignuća 218 učenika četvrtog razreda. Utvrđen je statistički značajan pozitivan učinak intervencije (od 0,78 do 2,87, $p < 0,01$).

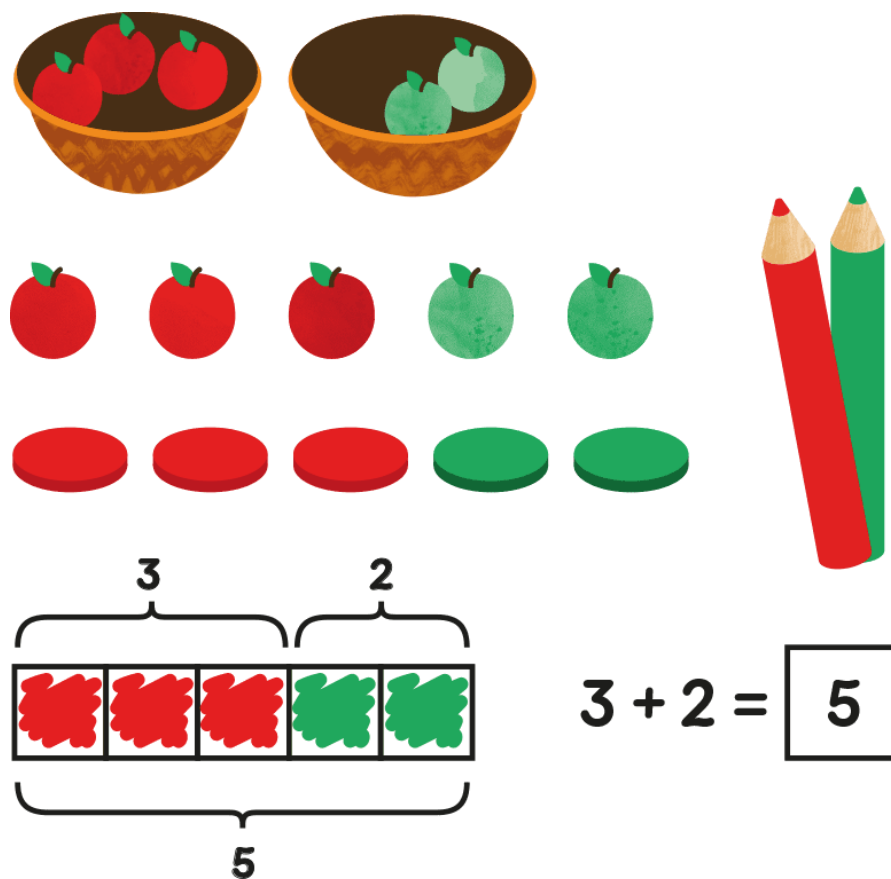
Privremeno vrednovanje pomoću aplikacije Acuity (Konstantopoulos i sur., 2013). Acuity je *online* aplikacija za učenike od trećeg do osmog razreda. Formirana je u obliku testa višestrukih odgovora te daje ocjene učenicima tri puta godišnje u svrhu predviđanja njihove uspješnosti na državnim testovima. Intervencija može pomoći pojedinim učenicima, razrednim odjelima ili cijeloj školi kako bi se poboljšala postignuća učenika iz matematike. „Učitelji vjeruju da privremene procjene mogu biti korisne u redizajnu lekcija, modificiranju nastave i pripremi učenika za standardizirano testiranje“ (Konstantopoulos i sur., 2013, str. 485). Procjene u okviru Acuity intervencije mogu biti dijagnostičke i prediktivne. Dijagnostičke procjene usredotočuju se na prepoznavanje specifičnih potreba učenika, a zatim na odgovarajuće personalizirano poučavanje. Testovi su jednako raspoređeni tijekom cijele školske godine i procijenjeni su u obliku broja točnih odgovora učenika. Prvo se testiraju vještine učenika iz prethodnog razreda, a sljedeće testiranje odvijat će se prema standardima državnog testa. Učitelji nakon testiranja imaju pristup odgovorima učenika. Acuity prediktivne procjene dizajnirane su za predviđanje uspješnosti učenika na državnom testu u Indiani ISTEP+. Postoje tri razine testiranja: prva razina testiranja odnosi se na prethodno znanje na početku školske godine, druga i treća razina uključuju sadržaje poučavanja tijekom školske godine. Prediktivne procjene nisu dostupne učiteljima jer sadrže sastavnice državnog testa ISTEP+. Privremene procjene utvrđuju područja koja je potrebno poboljšati, a učitelji kao i sama institucija trebaju koristiti te podatke i provesti strategije koje će donijeti ciljano poboljšanje. Konstantopoulos i sur. (2013) proveli su eksperimentalno istraživanje u SAD-u korištenjem standardiziranog državnog instrumenta ISTEP+ kako bi ispitali procjenu utjecaja matematičkog programa Acuity na postignuća učenika od trećeg do šestog razreda. U istraživanju je sudjelovalo ukupno 11 632 učenika, a rezultati istraživanja sugeriraju veća postignuća učenika i pozitivne učinke intervencije s efektom učinka od 0,19 ($p < 0,05$).

Inspirativna matematika (*Inspire Maths*, Lindorff i sur., 2019) je matematički program čiji je cilj povećanje učeničkih postignuća iz matematike te stavljanje naglasaka na osiguravanje da svi učenici shvate ključne pojmove prije prelaska na novu temu. Program je izgrađen na provjerenom pristupu poučavanja matematike u Singapuru. Program se temelji na konkretno-slikovno-apstraktnom pristupu koji osigurava duboko razumijevanje matematičkih pojmova. Spiralno osmišljeno napredovanje u programu s vremenom gradi znanje učenika, a inspirativno vođene matematičke sesije promiču raspravu i stave naglasak na matematičko izražavanje, odgovore punom rečenicom i zaključivanje. Učitelji se na nastavi matematike koriste specifičnim pitanjima koja promiču učeničko razumijevanje te služe za prepoznavanje učeničkih miskoncepcija. Primjeri su pitanja sljedeći: Kako znaš?, Što znaš?, Što vidiš?, Kakav je odnos između...?, Reci punom rečenicom..., Dokaži kako znaš..., Postoji li drugi način?, Pokaži mi drugi način?, Ako to znate, što još znate?, Što je isto, a što različito?, Možete li biti konkretniji?, Primjenjuje li se to uvijek?, Zbog čega to mislite?, Kako se to uklapa u...?, Što se događa?, Što će se vjerojatno dogoditi?. Program koristi udžbenike pomažući učenicima u svladavanju sadržaja iz matematike. Osim udžbenika, učenici koriste vježbenice. Vježbenice doprinose boljem razumijevanju već uvedenih koncepata i omogućuju učenicima samostalno vježbanje. One uključuju mnoštvo (izazovnih) pitanja i problemskih zadataka riječima.



Slika 27. Primjer rukovanja konkretnim materijalom prije prelaska na rukovanje modelima ili kockama koje predstavljaju voće (dodavanje četiri jabuke u košaru)
(<https://mathsnoproblem.com/en/approach/concrete-pictorial-abstract>)

Pozadina konkretnog, slikovnog i apstraktnog pristupa pomaže učenicima u učenju novih ideja i nadogradnji postojećeg znanja uvodeći apstraktne koncepte na razumljiv i opipljiviji način. Za razliku od tradicionalne metode poučavanja matematike u kojoj učitelj pokazuje rješavanje problema, konkretno-slikovno-apstraktni pristup oživljava koncepte dopuštajući učenicima samostalno iskustvo i rukovanje fizičkim predmetima. Svaki novi apstraktni koncept uči se manipuliranjem konkretnim materijalima ili fizičkim iskustvom. Učenici prvo rukuju stvarnim predmetima (slika 27) prije prelaska na modele koji se koriste za predstavljanje predmeta (slika 28). Lindorff i sur., (2019) proveli su eksperimentalno istraživanje upotrebe udžbenika matematike i nastavnog pristupa koji se koristi u Singapuru. Istraživanje je pokazalo značajan pozitivan učinak na učeničke rezultate iz matematike od 0,42 ($p = 0,046$).



Slika 28. Konkretno-slikovno-apstraktni pristup

(<https://mathsnoproblem.com/en/approach/concrete-pictorial-abstract>)

Modificirana aritmetička praksa (*Modified arithmetic practice*, McNeil i sur., 2015) ima za cilj unapređenje razumijevanja jednadžbi. Učenici drugog razreda nasumce su raspoređeni u učionicama kako bi vježbali zbrajanje jednoznamenkastih brojeva koristeći dvije radne bilježnice. U kontrolnoj skupini korištena je radna bilježnica u kojoj su problemski zadatci prikazani u tradicionalnom formatu operacije = rješenje (npr. $4 + 3 = \underline{\quad}$). U eksperimentalnoj skupini korištena je radna bilježnica u kojoj su operacije prikazane na desnoj strani (npr. $\underline{\quad} = 4 + 3$), a znak jednakosti ponekad je zamijenjen riječima (npr. „jednako je“). Zadatci su ponekad bili organizirani i tako da nekoliko zadataka zaredom ima jednak zbroj. Dakle, eksperimentalna i kontrolna skupina koristile su različite zapise jednadžbi. Učenici eksperimentalne skupine postigli su bolje razumijevanje jednadžbi od učenika kontrolne skupine. Ta se prednost zadržala otprilike pet do šest mjeseci nakon završetka intervencije i nije bilo uočenih teškoća u rješavanju zadataka iz matematike. Analiza je pokazala da je modificirana praksa poboljšala rješavanje jednadžbi i smanjila oslanjanje učenika na tradicionalne obrasce zapisivanja zadataka. Rezultati sugeriraju da male razlike u organizaciji i formatu zadataka mogu stvoriti značajne razlike u učeničkom razumijevanju temeljnih matematičkih pojmova. Intervencijom je postignut pozitivan i statistički značajan efekt učinka (0,37).

Fizički aktivan i akademski umješšan u školi (*Physically Active Math and Language Lessons Improve Academic Achievement*, Mullender-Wijnsma i sur., 2015) nov je način učenja matematike. Intervencija je trajala dvije školske godine (po 22 tjedna u jednoj školskoj godini). Glavni fokus bio je postavljen na stalno vježbanje i ponavljanje. Za vrijeme nastave učenici su 10 do 15 minuta rješavali matematičke zadatke uz istovremene fizičke aktivnosti. Na primjer, izvođenjem skokova učenici rješavaju zadatke množenja koji su prezentirani na interaktivnoj ploči. Fizičke vježbe bile su umjerenog do umjerenog snažnog intenziteta. U eksperimentalnom istraživanju koje su proveli Mullender-Wijnsma i sur. (2015) sudjelovalo je 499 učenika drugog i trećeg razreda. Standardiziranim ispitom utvrđeno je da takva nastava značajno pridonosi boljim učeničkim rezultatima iz matematike s pozitivnim efektom učinka od 0,42.

Uhvati račun (*Catch Up® Numeracy*, Rutt, i sur., 2014) je strukturirana individualna intervencija namijenjena učenicima s teškoćama u usvajanju matematičkih sadržaja. Ulogu prezentiranja nastavnih sadržaja ima učitelj, asistent u nastavi ili mentor. Odvija se u 15-minutnim sesijama dva puta tjedno, u periodu od 30 tjedana. Intervencija sadrži različite aritmetičke komponente: brojenje na glas, brojenje predmeta, čitanje i pisanje brojeva, stotice, desetice i jedinice, redne brojeve, procjene, rješavanje problemskih zadataka riječima i sl. Na temelju vrednovanja utvrđuju se ona područja koja zahtijevaju razvoj. Intervencija se sastoji od

četiri ključne faze: 1) vrednovanje za učenje, 2) identificiranje prikladnog fokusa, 3) individualne sesije i 4) kontinuirano praćenje (Rutt, i sur., 2014, str. 9). Vrednovanje za učenje podrazumijeva izradu različitih provjera koje se koriste kako bi se utvrdilo učeničko predznanje i interesi što predstavlja odgovarajuće polazište intervencije. Druga faza podrazumijeva izradu učeničkog profila radi postavljanja ciljeva učenja. U trećoj fazi svaki tjedan ostvaruju se individualne sesije u trajanju od 15 minuta. U četvrtoj fazi kontinuirano se prati učenikov napredak. Nakon 30 tjedana intervencije učenici su pokazali pozitivniji i bolji stav prema računanju, postali su motiviraniji u nastavi, pokazali su veću kontrolu nad svojim učenjem, osjećali su se sigurniji i samostaljniji u radu. Rutt i sur. (2014) ispitali su učinkovitost intervencije u eksperimentalnom istraživanju provedenom u Engleskoj korištenjem standardiziranog instrumenta. U intervenciji je sudjelovalo 224 učenika od 2. do 6. razreda. Postignut je značajan pozitivan efekt učinka ($d = 0,21$, $p < 0,05$) na postignuća učenika. Za ovaj program dostupan je videozapis (<https://youtu.be/eYbvIM7hGNQ>) u kojemu učenici govore o svojim iskustvima sudjelovanja u intervenciji Uhvati račun.

Matematički oporavak (*Mathematics Recovery*, Smith i sur., 2013) je program koji pokušava osigurati uspjeh učenika u nastavi matematike. Program su 1990-ih godina osmislili Robert J. Wright i njegovi suradnici u Južnom Walesu, u Australiji. Program svojom primjenom pokušava spriječiti javljanje negativnih stavova učenika prema matematici te nedostatak samopouzdanja.

Matematički oporavak je jednostavna intervencija u kojoj jedan učitelj individualizirano poučava učenike. Takav pristup omogućuje učitelju da u potpunosti prilagodi nastavu mogućnostima učenika. Intervencija uključuje upotrebu konkretnih materijala za promicanje konceptualnog učenja, koristi odgovarajuća poticajna sredstva koja omogućavaju učenicima prevladavanje zaostataka. Intervencija se sastoji se od tri faze u kojoj se prva odnosi na 60 sati stručnog usavršavanja za učitelje. Stručno usavršavanje učitelja uključuje petodnevnu radionicu tijekom ljeta kojoj je cilj bio naučiti učitelje koristiti okvir Matematičkog oporavka i dati im upute za vrednovanje učeničkog znanja. U drugoj fazi učitelji identificiraju i procjenjuju koji bi učenici trebali biti potencijalni kandidati za Matematički oporavak. Treća komponenta usmjerena je na individualnu poduku aritmetičkih sadržaja uz konstrukciju učeničkog profila u vezi s aritmetičkim znanjem učenika. Program traje 12 tjedana pri čemu učitelji provode četiri do pet tridesetominutnih vježbi tjedno.

1 Forward Number Word Sequence

Start counting from ** and I'll tell you when to stop.

(a) 1 (to 32)	(b) 48 (to 61)
(c) 76 (to 84)	(d) 93 (to 112)

2 Number Word After

Say the word that comes straight after ***. Example: Say the word that comes straight after one.

(a) Entry task			
14	11	19	12
23	29	20	

(b) Less advanced task		
5	9	7
3	6	

(c) More advanced task		
59	65	32
70	99	

3 Numeral Identification

Show each card in turn, saying, *What number is this?*

(a) Entry task								
	10	15	47	13	21			
80	12	17	99	20	66			

(b) Less advanced task					(c) More advanced task		
8	3	5	7	9	100	123	206
6	2	4	1		341	820	

4 Numeral Recognition

Arrange the cards from 1 to 10 randomly. *Which number is ... ?*

6 4 7 9 8

Slika 29. Primjer zadatka u programu Matematički oporavak (Wright i sur., 2008, str. 160)

Izbor zadataka (slika 29) ovisi o inicijalnoj i kontinuiranoj provjeri učeničkih odgovora. Učitelji su bilježili sesije kamerama kako bi ih kasnije mogli pregledati i analizirati učeničke odgovore na temelju kojih će izabrati vrstu zadataka za sljedeću sesiju. Cilj programa jest izabrati zadatke koji će biti izazovni i poticajni za učenike, a ne frustrirajući (Smith i sur., 2013). Prema Wrightu (2008a) postoji devet načela na kojima se temelji intervencija Matematičkog oporavka:

1. nastavni pristup programa temelji se na rješavanju problema; učenici su angažirani i trude se riješiti matematičke probleme koji su im zadani i koji su za njih prilično izazovni

2. poučavanje se temelji na sveobuhvatnoj procjeni učenikova znanja prije i tijekom nastave
3. nastava se temelji na učeničkom predznanju
4. učitelji mogu birati između različitih nastavnih postupaka koji uključuju odgovarajuće uvjete i zadatke
5. učitelji razumiju učeničke strategije i potiču razvoj sofisticiranijih strategija za rješavanje zadataka
6. poučavanje se prilagođava učenikovu znanju na temelju kontinuiranog promatranja
7. poučavanje se podupire i temelji na učeničkim verbalnim strategijama koje se koriste za izradu zadataka riječima
8. učitelji osiguravaju učenicima dovoljno vremena za rješavanje matematičkih problema
9. učenici su zadovoljni rješavanjem matematičkih problema i svojim napretkom.

U kvaziekperimentalnom istraživanju koje su proveli Smith i sur. (2013) ispitivalo se znanje 775 učenika prvog razreda iz matematike uključenih u Matematički oporavak korištenjem istraživačkog instrumenta. Istraživanje je pokazalo statistički značajan pozitivan učinak na postignuća učenika ($d = 1,04$, $p < 0,001$).

Fokus matematika (Focus MATH, Styers i Baird-Wilkerson, 2011) je program namijenjen učenicima ispodprosječnih sposobnosti iz matematike u kojem učitelji poučavaju male grupe učenika. Program Fokus matematika obogaćen je aktivnom okolinom učenja. Učenici slabijih sposobnosti i s nedostatkom znanja iz matematike u malim grupama produbljuju svoje razumijevanje matematičkih pojmova kombinacijom aktivacije proceduralnog znanja i eksplicitnom prezentacijom sadržaja. Program potiče učenike na rješavanje matematičkih problema i usmeno izražavanje razumijevanja pojmova. Program pomaže učiteljima u postavljanju mjerljivih ciljeva stalnim praćenjem napretka. Kako bi se osiguralo učeničko razumijevanje materijala, Fokus matematika nudi višestruke metode vrednovanja uspješnosti učenika. Učenici s teškoćama u matematici također mogu imati poteškoća i u čitanju. Kako bi im se pomoglo u tome u Fokus matematici uče se i matematičke riječi (Styers i Baird-Wilkerson, 2011). Program Fokus matematika sastoji se od nekoliko koraka koji se izvršavaju u razdoblju od 30 do 40 minuta. Svaki korak daje eksplicitne upute o nekoj temi što učenicima omogućava svakodnevni uspjeh. Unutar svakog koraka postoje tri glavne komponente: 1) Razvoj znanja – postavljanje svrhe, problema i modeliranje koncepata za učenike. Ovaj je dio interaktivan i omogućuje učenicima uspostavljanje veze s prethodnim iskustvima. Učitelji i

učenici su u interakciji i javlja se veća komunikacija među njima. 2) Vođena praksa – učitelji omogućuju učenicima učenje u malim skupinama pri rješavanju matematičkih problema. Učitelj prati učenikovo razumijevanje sadržaja, provjerava razumijevanje bitnih pojmova tijekom nastave i pomaže mu kada pogriješi. 3) Nezavisna praksa – učitelji omogućuju učenicima samostalno vježbanje nizom zadataka. Programom su propisani udžbenici za učenike i učitelje prema NCTM smjernicama. Fokus matematika rano identificira rizične učenike i ubrzava njihovo učenje s intenzivnom, uravnoteženom i individualiziranom nastavom. Lekcije su organizirane prema temama i mogu se obrađivati u jednoj sesiji što čini program idealnim za održavanje ljeti ili nakon škole.

Nastavne jedinice sadrže sažetak o sadržaju koji se obrađuje, a sama intervencija uključuje i svakodnevne samostalne vježbe i dnevne izlazne kartice kako bi se mogao pratiti napredak učenika. Lekcije potiču učenike na rješavanje matematičkih problema, razgovor i objašnjava vanje svog razmišljanja. Učenici se koriste matematičkim jezikom, matematičkim alatima, povezuju znanje s prethodnim i na kraju razvijaju povjerenje u svoje nove vještine. Fokus matematika nudi ciljano postavljanje i kontinuirano praćenje napretka kako bi pomogao učiteljima u individualizaciji nastave. Intervencija Fokus matematike pruža i intenzivnu, uravnoteženu i individualiziranu nastavu. Učinak programa u eksperimentalnom istraživanju Styers i Baird-Wilkerson (2011) korištenjem standardiziranog instrumenta u kojem je sudjelovao 341 učenik trećeg i petog razreda bio je pozitivan i statistički značajan ($d = 0,24$, $p < .001$).

Brojenje brojeva (*Numbers Count*, Torgeson i sur., 2013) je intervencija prilagođena učenicima koji imaju većih poteškoća u matematici. U toj intervenciji koristi se individualno poučavanje. Programom se pokušavaju unaprijediti matematička postignuća učenika. Postoje dva programa koji su dostupni školama: *Brojenje brojeva* – za učenike od prvog do trećeg razreda i *Brojenje brojeva 2* za učenike od četvrtog do devetog razreda. Učitelji poučavaju učenike pojedinačno, u paru ili u troje tri puta tjedno u trajanju od 30 minuta. Nakon detaljne dijagnostičke procjene, učitelj planira program prilagođen individualnim mogućnostima svakog djeteta. Nastava uvijek ima istu osnovnu strukturu koja osigurava primjeren tempo i napredak učenja te mogućnost bavljenja različitim matematičkim aktivnostima. Većina lekcija sadrži dvije aktivnosti učenja kako bi se održala raznolikost i tempo učenja, iako postoje slučajevi kada je prikladnije provesti samo jednu dužu aktivnost. Učitelj odabire područja koja će razvijati iz individualnog plana učenja te odlučuje o uvođenju novih koncepata. Učitelji potiču učenike na razmišljanje i procjenu vlastita učenja tijekom svake lekcije, jer im na taj

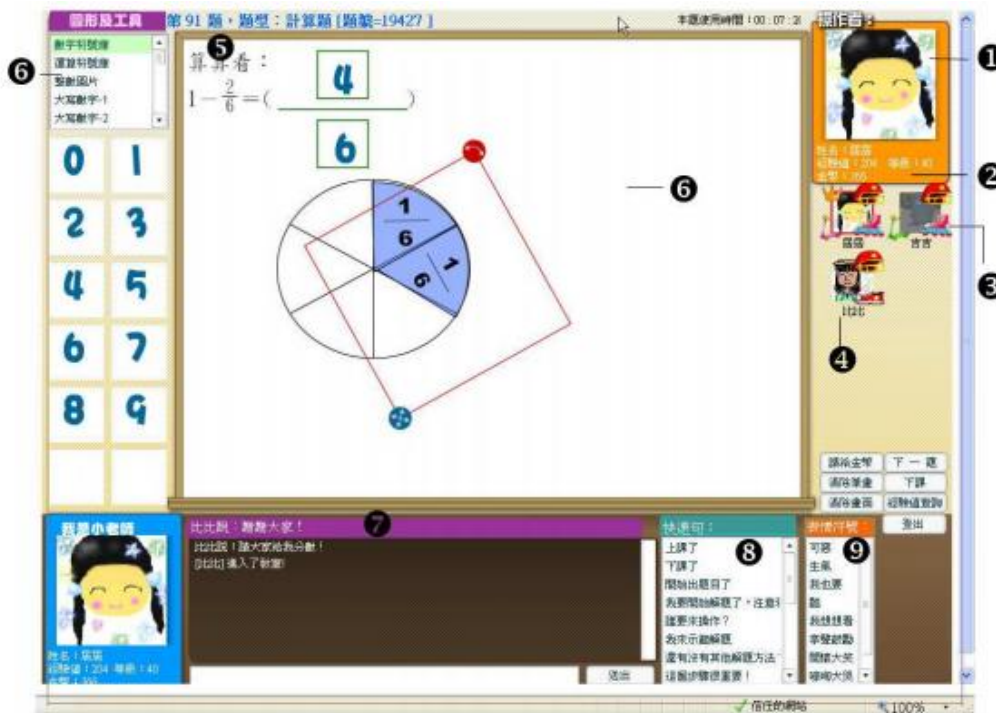
način pomažu u preuzimanju odgovornosti za vlastito učenje te aktivno uključivanje u proces učenja. Učitelj se povezuje s roditeljima i dijeli svoje stručno znanje s kolegama.



Slika 30. Videozapisi u vezi s iskustvima učitelja i učenika u provedbi programa Brojenje brojeva (Edge Hill University, 2016)

Učinkovitost intervencije Brojenje brojeva provjerena je u eksperimentalnom istraživanju koje su proveli Torgeson i sur. (2013) korištenjem standardiziranog instrumenta na uzorku od 504 učenika prvog razreda. Istraživanje ima pozitivan efekt učinka ($d = 0,33$, $p = 0,05$). To potvrđuju i riječi učiteljica i učenika koji sudjeluje u njegovoj realizaciji (slika 30).

Višekorisnički sustav za vršnjačko poučavanje G-matematika (Multi-user G-Math Peer Tutoring System, Tsuei, 2012) je učinkovit alat za poboljšanje učenja matematike učenika razredne nastave. U okviru intervencije vršnjačkog poučavanja izrađena je aplikacija G-matematika koja sadrži dva podsustava, jedan je za komunikaciju s nastavnicima, a drugi za učeničku interakciju. Zadatak učenika jest riješiti problemske matematičke zadatke koji su im prezentirani na zaslonu. Pri rješavanju zadataka učenici mogu međusobno komunicirati preko sučelja G-matematika sustava. Nastavni softver uključuje multimedijske značajke koje pomažu učenicima u učenju savjetima, interaktivnim dijalozima, videozapisima i mrežnim povratnim informacijama (Tsuei, 2012). Računalno generirane povratne informacije ohrabruju učenike da surađuju s drugim učenicima u grupi.



Slika 31. Elementi sučelja G-matematika¹¹ (Tsuei, 2010, str. 203)

Kvaziekperimentalno istraživanje koje je proveo Tsuei (2012) korištenjem istraživačkog testa u kojem je sudjelovalo 88 učenika trećeg i četvrtog razreda pokazuje da je *online* vršnjačko poučavanje učinkovita strategija koja pomaže učenicima povećati rezultate učenja iz matematike s pozitivnim efektom učinka od 0,79 ($p < 0,001$).

Matematika i zaključivanje (Mathematics and Reasoning, Worth i sur. 2016) je program čiji je cilj razviti razumijevanje logičkih principa iz osnova matematike. Intervencija prema Worth i sur. (2016) traje 12 tjedana i učenici dobivaju instrukcije jednom tjedno u trajanju od jednog sata. Program se sastoji od deset nastavnih jedinica koje su učenicima prezentirane u sklopu redovne nastave matematike. Učitelji koriste planove i materijale za izvođenje programa. Učenje matematičkih sadržaja podrazumijeva *online* igre kojima učenici mogu pristupiti kod kuće i u školi. Učenici biraju strategije rješavanja problemskih zadataka, donose logične zaključke, razvijaju i opisuju rješenja te prepoznaju kako se ta rješenja mogu primijeniti. Kako bi postali samouvjereni i samostalni matematički mislioci, učenici moraju razviti sposobnost suočavanja s matematičkim problemom, ustrajati u njegovu rješavanju, vrednovati i objasniti

¹¹ Elementi sučelja G-matematika sadržavaju: (1) korisničko ime i avatar, (2) ocjene, (3) razinu iskustva i zadatka, (4) članove grupe, (5) matematički problem, (6) tutorsko područje, (7) matematičke prikaze, (8) područje za razgovor, (9) upute i (10) emotikone (Tsuei, 2010, str. 203).

svoje rezultate. Učenici trebaju sami procijeniti točnost svojih odgovora, primijeniti vještine matematičkog zaključivanja u drugim predmetnim područjima i u svakodnevnom životu. Worth i sur. (2016) proveli su eksperimentalno istraživanje u Engleskoj u kojem je sudjelovalo 1365 učenika prvog razreda. Korištenjem standardiziranog instrumenta utvrđen je pozitivan i statistički značajan efekt učinka ($d = 0,20$, $p = 0,05$).

4.5. Rezultati i rasprava

U ovom sustavnom pregledu literature na temelju kriterija navedenih u tablici 3 izabrano je 19 matematičkih intervencija. Njihova učinkovitost utvrđena je eksperimentalnim i kvaziekperimentalnim istraživanjima. Iz objavljenih publikacija izdvojeni su opisi intervencija na kojima je provedena kvalitativna analiza uz korištenje unaprijed definiranih kategorija učinkovite nastave matematike: uvažavanje učeničkog predznanja, korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja, korištenje tehnologije, suradničko učenje i povratne informacije (Jukić i sur, 2020). Analizom cjelovitih radova pronašla sam relevantne podatke koji su mi dali odgovor na istraživačka pitanja.

U tablici 3 nalazi se pregled zastupljenosti značajki učinkovite nastave u studijama koje imaju pozitivan učinak na rezultate učenja učenika iz matematike, a u narednim poglavljima opisano je i objašnjeno kako se one koriste u nastavi matematike.

Tablica 5. Analiza značajki učinkovite nastave matematike

Program (referenca)	Uvažavanje učeničkog predznanja	Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema	Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja	Korištenje tehnologije	Suradničko učenje	Povratne informacije
Matematičke mini igre (Bakker i sur., 2015)			+	+	+	+
Metakognitivni program za rješavanje problema s riječima (de Kock i Harskamp, 2014)		+		+	+	
Fokus matematika (Educational Research Institute of America, ERIA, 2010, 2017)	+,+	+/-, +/-				
Učenje s mozgom na umu (Erol i Karaduman, 2018)	+			+		
Digitalni alat za formativno vrednovanje Snappet (Faber i sur., 2017)				+		+
Gusarska matematika (Fuchs i sur., 2010)		+	+			
Galaktička matematika (Fuchs i sur., 2013)		+				+
Sučeljavanje s razlomcima (Fuchs i sur., 2016)		+		+	+	
Brojčane rakete (Gersten i sur., 2015)	+	+/-	+			+
Privremeno vrednovanje pomoću programa Acuity (Konstantopoulos i sur., 2013)	+			+		
Inspirativna matematika (Lindorff i sur., 2019)		+/-	+			+/-

Program (referenca)	Uvažavanje učeničkog predznanja	Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema	Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja	Korištenje tehnologije	Suradničko učenje	Povratne informacije
Modificirana aritmetička praksa (McNeil i sur., 2015)	+	+/-				
Fizički aktivan i akademski umještan u školi (Mullender-Wijnsma i sur., 2015)	+					
Uhvati račun (Rutt i sur., 2014)					+	
Matematički oporavak (Smith i sur., 2013)	+	+	+			
Matematika u fokusu (Styers i Baird-Wilkerson, 2011)		+	+		+	
Brojenje brojeva (Torgerson i sur., 2013)	+					
Višekorisnički sustav za vršnjačko poučavanje G-matematika (Tsuei, 2012)		+		+	+	+
Matematika i zaključivanje (Worth i sur., 2016)		+	+	+		
Broj intervencija u kojima je utvrđena pojedina značajka učinkovite nastave matematike	8	12	7	8	6	6

4.2.1. *Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema*

Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da učenici moraju biti uključeni u rješavanje problema i raspravu o zadacima koji promiču matematičko zaključivanje i raznolike strategije rješavanja problema. Učenike treba poticati na učenje nudeći im bogate i izazovne zadatke koji omogućuju odlučivanje, promoviraju raspravu i komunikaciju, potiču originalnost i otkriće (Jukić Matić i sur., 2020). Sullivan (2011) smatra da je učenike potrebno izložiti zadacima koji omogućuju rješavanje problema kako bi izrazili svoje razmišljanje tijekom njihova rješavanja. Sinay i Nahornic (2016) ističu da problemski zadatci pružaju mogućnost za povezivanje matematičkih ideja i razvijanje konceptualnog razumijevanja. Rittle-Johnson i Jordan (2016) tumače da je potrebno dopustiti učenicima usporedbu više načina rješavanja problema i kritiziranje uobičajenih pogrešaka koje se pritom javljaju.

Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema pronađeno je u 13 istraživanja (deKock i Harskamp 2014, ERIA 2010, 2017, Fuchs i sur., 2010, Fuchs i sur., 2013, Fuchs i sur., 2016, Gersten i sur., 2015, Konstantopoulos i sur., 2013, Lindorff i sur., 2019, Smith i sur., 2013, Styers i Baird-Wilkerson, 2011, Tsuei, 2012 i Worth i sur., 2016).

Analizirajući detaljno kodirane dijelove istraživanja prepoznate su dodatne teme koje se nalaze u svim ili u većini navedenih istraživanja. To su: *metakognitivne vještine i samokontrola, učiteljevo vođenje rješavanja zadataka, učeničko suradničko rješavanje zadataka i vrste problemskih zadataka.*

Rješavanjem problema učenici mogu značajno razviti sposobnosti kritičkog procjenjivanja problemske situacije u zadatku. Istraživanja također pokazuju da učenici rješavajući zadatke koji promiču zaključivanje i rješavanje problema pored kognitivnih vještina razvijaju i *metakognitivne vještine i samokontrolu* koje im omogućavaju učinkovito korištenje matematičkog znanja. Metakognitivne vještine omogućuju učenicima da reguliraju svoje razmišljanje, kreativno rješavaju problemske zadatke, omogućuje uspješnu komunikaciju i suradnju s drugim učenicima (deKock i Harskamp, 2014). Koristeći metakognitivne *online* programe (Tsuei, 2015, deKock i Harskamp, 2014) učenici su rješavali problemske zadatke riječima, a računalni program pružao im je povratne informacije o procesu rješavanja problemskih zadataka te im je olakšavao matematičko razmišljanje. „Obrazovni softver za matematičku nastavu uključuje multimedijske značajke koje pomažu učenicima u učenju kroz savjete, interaktivne dijaloge, videozapise i mrežne povratne informacije“ (Tsuei, 2012, str. 1172). Također, u istraživanju Lindorff i sur. (2019) promicanjem aktivnog učenja i razvijanjem metakognitivnih vještina upućuje se učenike na korištenje strategija koje će im pomoći u

rješavanju različitih vrsta problemskih zadataka, potiče ih se da postavljaju pitanja jedni drugima i objašnjavaju odgovore te ih se motivira na razmišljanje o prednostima i nedostacima pristupa koji koriste.

Istraživanja ukazuju da se povećanje učeničkih postignuća može postići integracijom programa za rješavanje problemskih zadataka u svakodnevnu nastavu te izborom odgovarajućih sadržaja (deKock i Harskamp, 2014). Pri *vođenju rješavanja zadataka* učitelji osmišljavaju prikladne problemske zadatke primjerene učeničkim sposobnostima (Smith i sur., 2013). Inicijalnom procjenom na početku školske godine određuje se razina znanja učenika i na temelju te razine znanja i kasnijih točnih odgovora u zadacima stvaraju se problemski zadatci primjereni učenicima (Smith i sur., 2013; Konstantopoulos i sur., 2013; Fuchs i sur., 2013). Cilj je odabrati zadatke koji su izazovni, ali da istovremeno omogućuju učenicima razumnu šansu za rješavanje, čime se nastoje izbjeći pretjerane frustracije tijekom njihova rješavanja. Kako bi ih angažirali, učitelji daju učenicima dovoljno vremena za rješavanje zadataka. Primjenom strategije brzih vježbi učenike se usmjeravalo na rješavanje problemskih zadataka (bez olovke i papira) u što bržem roku (Fuchs i sur., 2013). Učenike se poticalo na pronalaženje i korištenje bilo kojeg načina koji bi ih mogao dovesti do rješenja zadataka. Nakon rješavanja problemskih zadataka, učenici su trebali opisati strategije koje su koristili. Na temelju učenikovih opisa definirane su strategije rješavanja problemskih zadataka: brojenje prstiju (koriste prste na rukama i nogama), verbalno brojenje (broje naglas ili u glavi), pronalaženje odgovora (govore odgovor brzo bez naznake brojenja), pogađanje ili znanje i dekompozicije (dolazak do odgovora u koracima, bez brojenja). Osim toga, učitelji su nastavne sate snimali i analizirali videosnimke te su propitivali načine razmišljanja učenika kao i svoju praksu. Kombinacija promatranja aktivnosti učenika i izvješćivanje o učeničkim strategijama prikupljenim neposredno nakon rješavanja svakog problemskog zadataka pokazala se korisnom. Učitelji mogu uputiti učenike da rješavaju problemske zadatke na četiri načina: razumijevanjem postavljenog problema, osmišljavanjem plana rješavanja, izvršavanjem plana i razmišljanjem o rješenju (Styers i Baird-Wilkerson, 2011). U prvom koraku učenici povezuju problem s prethodno riješenim problemima. Zatim u fazi refleksije razmatraju alternativna rješenja i mogućnosti primjene na druge probleme. Svrha rješavanja problemskih zadataka uglavnom se odnosi na primjenu (Styers i Baird-Wilkerson, 2011). Učenici dobivaju brojne primjere matematičkih struktura i koncepata praćenih različitim mogućnostima za primjenu učenja i prenošenja naučenoga iz jednog konteksta problema u drugi. Nadalje, učitelji učenicima dijele smjernice tijekom rješavanja postavljajući im poticajna pitanja kako bi napravili plan za

rješavanje zadataka (Fuchs i sur., 2010). Učitelji poučavaju učenike pravilima rješavanja problemskih zadataka ukazujući im na čestu nevažnost numeričkih vrijednosti, usmjeravajući ih na rješavanje zadataka s nedostatkom informacija, te rješavanje zadataka piktogramima ili grafičkim prikazima. Učitelji koriste problemske zadatke riječima za ponavljanje naučenog na početku sata (Fuchs i sur., 2016). Učenici dobivaju kopiju zadanog problema u kojoj mogu prikazati rješenje zadatka i u kojoj mogu postaviti neki drugi problem na isti način.

Nezaobilazna dimenzija u rješavanju matematičkih problemskih zadataka jest učeničko suradničko učenje (Tsuei, 2015; deKock i Harskamp, 2014). *Učeničko suradničko rješavanje problemskih zadataka* može se ostvariti putem čavrljanja preko *online* aplikacija. Važnost primjene takvih aplikacija ogleda se u dužem sudjelovanju i opuštenijem rješavanju problemskih zadataka, za razliku od tradicionalne nastave u kojoj učenici imaju ograničeno vrijeme za njihovo rješavanje. Računalni program prikladan je za primjenjivanje u matematičkoj praksi i koristi se u kombinaciji s udžbenicima iz matematike. Učiteljevo vođenje rješavanja zadataka pomoglo je učenicima u učenju i u korištenju računalnog programa i davanjem savjeta u svezi rješavanja problemskih zadataka. Nadalje, učenici tijekom rješavanja problemskih zadataka mogu dobivati instrukcije jednom tjedno u trajanju jednog sata (Worth i sur., 2016). Učenici uče kako ocjenjivati situacije, biraju strategije rješavanja problema, donose logične zaključke, razvijaju i opisuju rješenja te prepoznaju kako se ta rješenja mogu primijeniti. Istraživanja koja je proveo Američki institut za obrazovna istraživanja pokazuju da je najučinkovitije rješavanje problemskih zadataka ostvareno kroz raspravu o problemima koristeći pristupe koji učenicima pomažu pri planiranju rješavanja zadataka i stvaranju pozitivnog stava o problemskim zadacima (ERIA, 2010, 2017).

Među *vrstama problemskih zadataka* ističu se problemske priče (Gersten i sur., 2015). Svaki problemski zadatak riječima učitelji učenicima čitaju usmeno. Nadalje, problemski zadatci temelje se na teoriji shema (Fuchs i sur., 2010). Prema Pritchardu (2009) to su mentalni modeli koje su psiholozi opisivali i ispitivali dugi niz godina, a koji su sada prihvaćeni kao razuman način objašnjenja procesa učenja. Shema je kategorija koja obuhvaća određenu vrstu problema (Gersten i sur., 2015). Bognar i Filipov (2020) ističu da pamćenju informacija pridonosi njihova smislenost, organiziranost i elaboracija. „Usvojeno znanje sastoji se od informacija međusobno povezanih u mrežu. Povezivanje pojmovnih mreža u veće cjeline koje predstavljaju složene strukture nazivaju se sheme“ (Bognar i Filipov, 2020, str. 208). Pritchard (2009) shemu definira kao višedimenzionalni spremnik velike količine znanja ili kao okvir za brojne veze između pojmova. Podatci mogu biti različitih oblika (slika, zvuk, miris, osjećaj itd.). Svaki pojam

povezan je s drugim pojmovima, a veze nastaju kao rezultat postojanja značajne veze između povezane stavke. Postojeća shema predstavlja zbroj trenutnog stanja znanja i učenikova razumijevanja određene teme, događaja, radnje itd. Ako se događa novo učenje, dobro je utvrditi ono što je već poznato o određenoj temi. Polazna točka poznatog i razumljivog vrlo je važna ako se želi novo učenje učiniti učinkovitim (Pritchard, 2009). Što je šira tema određenog tipa problema to je veća vjerojatnost da će učenici prepoznati novi problem kao pripadajući poznatom tipu problema za koji već znaju metodu rješenja.

Na temelju rezultata provedene analize u svoje sam akcijsko istraživanje uključila problemske zadatke. Rješavanje je problemskih zadataka važno jer omogućuje učenicima razvoj konceptualnog razumijevanja matematičkih sadržaja. Važno je postići da učenici samostalno i aktivno traže rješenja te znaju objasniti kako do njih dolaze. Promicanjem zaključivanja i rješavanja problema pripremala sam učenike za snalaženje u budućim životnim situacijama. Potrebno je jasno postaviti problem ili stvarati situacije u kojima će učenici sami formirati problem u kojima će doći do izražaja njihova kreativnost, ustrajnost i dosljednost. Nadalje, poticala sam razvoj kreativnog mišljenja uvođenjem problemskih zadataka koji imaju više rješenja. Kod učenika je potrebno razvijati vještinu rješavanja problema koja pored kognitivnih uključuje socijalne vještine koje im pomažu u utvrđivanju uzroka problemskih situacija te u pronalaženju rješenja. Osim toga, nužno je stvoriti ugodnu radnu atmosferu u kojoj će rješavanje problema učenicima biti izazov, ali će im omogućiti da postignu rezultate u skladu sa svojim individualnim mogućnostima.

4.2.2. Korištenje tehnologije

Tehnologiju Jukić Matić i sur. (2020) smatraju važnom i ističu kako je koriste učitelji kako bi predstavili matematičke koncepte na dinamične, vizualno privlačne načine koji motiviraju učenike i potiču ih na aktivnost. Kyriacou i Goulding (2006) utvrdili su kako primjena informacijske i komunikacijske tehnologije može imati pozitivan učinak na podizanje motivacije, no važno je da se motivacijski učinak koristi na način koji stvara i povećava dublje razumijevanje matematičkih sadržaja. Hattie (2009) smatra da korištenje računala može pomoći u angažmanu i pozitivnim stavovima prema učenju i školi. On smatra da računala mogu povećati sudjelovanje u učenju, ali ne postoji potrebna veza između posjedovanja računala, korištenje računala i ishoda učenja.

U osam intervencija pronađena je upotreba *tehnologije* koja je korištena u učenju matematike (Baker i sur., 2015; de Kock i Harskamp, 2014; Erol, 2018; Faber i sur., 2018; Fuchs i sur., 2016; Konstantopoulos i sur., 2013; Tsuei, 2012 i Worth i sur., 2016). Analizirajući detaljno kodirane dijelove navedenih istraživanja izdvojila sam dodatne teme koje su zastupljene i nalaze se u svim ili većini navedenih istraživanja. To su: *digitalni alati u nastavi matematike, suradničko učenje uz korištenje tehnologije i pravovremene povratne informacije*.

Digitalni alati koriste se na različite načine u učionici (Erol, 2018). Na temelju analize radova možemo zaključiti da tehnologija može dovesti do učinkovitijeg učenja učenika ako se primjenjuje učestalije i svakodnevno na nastavi. Sva navedena istraživanja u kojima se primjenjivala tehnologija u nastavi matematike rezultirala su promjenama nastavne prakse i unapređenjem znanja učenika. Osim toga, neke druge značajke učinkovite nastave matematike došle su do izražaja pri korištenju tehnologije. Na primjer, suradničko učenje promovirano je primjenom metakognitivnih računalnih programa (Tsuei, 2015; de Kock i Harskamp, 2014). Učitelji mogu koristiti suradničke aktivnosti kako bi pomogli učenicima za uspostavljanje konkretne i apstraktne razine nastave putem interakcije vršnjaka i pažljivo osmišljenih aktivnosti. Osim toga, računalni programi mogu se koristiti i u razvijanju metakognitivnih vještina kao i u angažiranju učenika u strukturiranom predstavljanju problemskih zadataka. Primjena digitalnih alata potiče razrednu reflektivnu raspravu o onome što su naučili (Bakker i sur., 2015). Integracija tehnologije u nastavi matematike može doprinijeti ostvarivanju metakognitivnih ciljeva jer omogućuje rasuđivanje na višim kognitivnim razinama podržavajući detaljno planiranje, praćenje i predviđanje mogućih rezultata (Tsuei, 2011). Učinkovitost promjena primjenom tehnologije u učenju potvrđuju i rezultati istraživanja Worth i sur. (2016) koji navode da internetske igre razvijaju vještine učeničkog rasuđivanja, matematičkog zaključivanja te ih potiču na raspravu i doprinose njihovoj vještini računanja.

Učenici su predstavljali postupke rješavanja zadataka u kombinaciji s vizualnim shemama koje prikazuju zadatci. Osim toga računalni programi omogućili su javno prikazivanje učeničkih rješenja (Konstantopoulos i sur., 2013; de Kock i Harskamp 2014; Tsuei, 2012, Faber i sur., 2017; Baker i sur, 2015). Nadalje, računalni programi omogućili su registriranje učeničkih rješenja što je učiteljima pružalo uvid u njihovo razumijevanje matematičkih sadržaja (Konstantopoulos i sur., 2013; de Kock i Harskamp 2014; Tsuei, 2012; Faber i sur., 2017; Baker i sur, 2015). Učinkovitost primjene tehnologije u učenju potvrđuje istraživanje u vezi s korištenjem *online* aplikacije Acuity pomoću koje se tri puta godišnje provode *online* provjere kako bi se mogla predvidjeti učenička uspješnost na državnim testovima. Intervencija može

pomoći pojedinim učenicima, razrednim odjelima ili cijeloj školi kako bi poboljšali postignuća. „Učitelji vjeruju da privremene procjene mogu biti korisne u redizajnu lekcija, modificiranju nastave i pripremi učenika za standardizirano testiranje“ (Konstantopoulos i sur., 2013, str. 485). Uporaba mini matematičkih igara učenicima povećava interes i motivaciju za učenje matematike jer većina učenika ionako veći dio svog vremena provodi uz digitalne igre (Bakker i sur., 2015).

Upotreba tehnologije u nastavi matematike poboljšala je postignuća učenika jer je omogućila *pravovremene povratne informacije* koje su bile korisne učiteljima (Bakker i sur., 2015; Konstantopoulos i sur., 2013; de Kock i Harskamp, 2014) i učenicima (Faber i sur., 2017; de Kock i Harskamp, 2014). Pravovremene povratne informacije putem računala o matematičkom znanju učenika omogućuju učiteljima izradu odgovarajućih zadataka na temelju njihovih prethodnih odgovora. Dakle, učitelji odlučuju o konstruiranju zadataka na temelju razine znanja prethodno riješenih zadataka (Faber i sur., 2017).

Iako je učinkovitost korištenja tehnologije zastupljena u navedenim istraživanjima, i dalje ne možemo tvrditi da tehnologija sama po sebi pridonosi povećanju učeničkih postignuća iz matematike. Iako učenici mogu naučiti kvalitetno manipulirati *alatima*, oni možda neće steći znanje o matematičkim pojmovima. „Štoviše, neki učenici radije pogađaju odgovore, umjesto da iskoriste multimedijske značajke te nauče riješiti matematički problem“ (Tsuei, 2012, str. 1172). Istraživanja pokazuju da se računala ne rabe često ili svakodnevno na satima matematike, iako su široko dostupna. Posebno je važno tehnologiju koristiti u kombinaciji s drugim značajkama učinkovite nastave matematike.

Unapređenje kvalitete nastave matematike moguće je ostvariti korištenjem tehnologije koja uključuje računala (prijenosna/stolna), tablete, mobilne uređaje, interaktivne ploče. U nastavi matematike moguće je koristiti neke aplikacije, alate i programe kao npr. Learning Apps, Wordwall, kao i različite programe za izradu kvizova (npr. Kahoot i Quizis), osmosmjerke, križaljke, igre otkrivanja parova itd. Tehnologija može pripomoći u vizualizaciji složenijih matematičkih problema te time olakšati njihovo rješavanje. Učenici pomoću tehnologije mogu razvijati suradnju, rješavati složenije probleme i tražiti odgovore na njih. Tehnologija može posebno doći do izražaja pri davanju povratnih informacija učenicima (npr. koristeći aplikaciju Plickers ili MS Forms).

4.2.3. Suradničko učenje

Prema Marzanu i sur. (2006) suradničko je učenje najfleksibilnija i najmoćnija strategija. Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da učinkoviti učitelji koriste suradničko učenje u malim grupama kako bi učenici mogli razgovarati o važnim idejama, a to ima i pozitivne učinke na učenje, socijalne vještine i samopoštovanje. Tsuei (2012) smatra da suradničko učenje pozitivno utječe na širok raspon socijalno-afektivnih ishoda, uključujući povećano samopoštovanje, poboljšani odnos prema predmetu i učenju. Prema Bognar (2006) suradničko učenje nastalo je kao antiteza natjecateljskom (kompetitivnom) učenju koje uglavnom dominira u tradicionalnoj nastavi. U suradničko učenje u širem smislu ubrajaju se aktivnosti u paru, istraživački projekti učenika, zajednice učenja. Međutim, suradničko učenje u užem smislu (kooperativno učenje) „odvija se u grupama i svi članovi grupe zajednički rade na ostvarenju zadataka pri čemu se javlja pozitivna međuovisnost članova i individualna odgovornost“ (Bognar, 2006, str. 8). Suradničko učenje može se koristiti za poticanje aktivnog učenja, što je važna dimenzija učenja matematike. Učitelji mogu koristiti suradničke aktivnosti kako bi pomogli učenicima za uspostavljanje konkretne i apstraktne razine nastave putem interakcije vršnjaka i pažljivo osmišljenih aktivnosti. Meredith i sur. (1998) pod suradničkim učenjem podrazumijevaju: „zajedničko učenje učenika u tandemu (paru) ili malim skupinama s ciljem rješavanja zajedničkih zadataka, proučavanja i istraživanja zajedničke teme ili nadogradnje uzajamne spoznaje radi stvaranja i razvijanja novih ideja, novih kombinacija ili jedinstvene inovacije“ (Kadum-Bošnjak i Buršić-Križanac, 2012, str. 182).

Motivacijska perspektiva kooperativnog učenja naglašava suradničku strukturu nagrađivanja kao kritični element učenja (Tsuei, 2012). Praktičari kao jedan od glavnih fokusa u matematičkom obrazovanju preporučuju suradničko učenje kao strategiju koja poboljšava učeničko razmišljanje, rasuđivanje i metakogniciju. Suradničkim učenjem učenici mogu zajednički analizirati pronađene informacije, a zatim sudjelovanjem u raspravi izložiti naučeno. Na taj način stvara se veća motivacija za učenje i unapređuju se rezultati učenja. Konstruktivističko učenje naglašava važnost interakcije vršnjaka kao bitnu odrednicu kognitivnog razvoja. Suradničkim učenjem učenici međusobno objašnjavaju i poučavaju koncepte, dijele i primaju pomoć, nadograđuju ideje drugih i prepoznaju i rješavaju proturječnosti nastale između vlastitih i tuđih rješenja.

Suradničko učenje pronađeno je u šest studija (Bakker i sur., 2015; de Kock i Harskamp 2014; Fuchs i sur., 2016; Rutt i sur., 2014; Tsuei, 2012; Styers i Baird-Wilkerson 2011). Analizirajući detaljno kodirane dijelove navedenih istraživanja izdvojene su dodatne teme koje

su zastupljene i nalaze se u svim ili većini navedenih istraživanja. To se odnosi na: *vršnjačko poučavanje, učenje u skupinama i učenje u paru*.

Vršnjačko poučavanje pruža učenicima različite alate za komunikaciju, otvara im mogućnosti vježbanja matematičkih vještina i pojmova te im omogućuje rješavanje problemskih zadataka s vršnjacima. Ovaj oblik suradničkog učenja pružio je učenicima veće mogućnosti učenja nego u tradicionalnom kontekstu. Odnosno, učenici su imali više vremena za rješavanje problemskih matematičkih zadataka nego u uobičajenoj nastavi matematike. U učenju matematike *online* sudjelovanje učenika pozitivno djeluje na učenike kroz motivacijske povratne informacije ohrabrujući ih da daju svoj doprinos grupi (Tsuei, 2012).

Učenje u skupinama uz korištenje matematičkih mini igara omogućilo je učenicima rješavanje matematičkih zadataka nakon čega su raspravom u skupinama utvrđivali najučinkovitije strategije koje su pri tome koristili. Nakon određivanja najučinkovitijih strategija koje su otkrili kroz refleksivnu raspravu s drugim učenicima, nastavili su ih primjenjivati u učenju (Bakker i sur., 2015). Takav način učenja potiče razvoj metakognitivnih vještina. Učenje u skupinama pomoglo je učenicima i u rješavanju problemskih zadataka riječima, a računalni program pružao im je povratne informacije potičući ih na sustavno rješavanje zadataka. Učenje u skupinama potiče učenike na međusobnu suradnju, komuniciranje putem čavrljanja ili razrednu raspravu (de Kock i Harskamp, 2015) te usmeno izražavanje razumijevanja pojmova (Styers i Baird-Wilkerson, 2011). Osim toga, učenici su prezentirali svoja rješenja koristeći vizualne sheme. Učenjem u skupinama učenici su prevladali strah od javnog govora i slobodnije su iznosili procjene mogućih matematičkih rješenja (Rutt i sur., 2014). Poučavajući male skupine učenika učitelji su omogućili aktivnu okolinu učenja. Učenici koji su imali poteškoća u učenju matematike u malim su skupinama produbljivali svoje razumijevanje matematičkih pojmova. Tijekom učenja u skupinama učenici su dobivali eksplicitne upute o određenoj temi koje su im omogućavale postizanje uspjeha. Učitelji su poučavali učenike dijeleći nastavne sadržaje na manje cjeline te su izmjenjivali tempo nastave kako bi zadovoljili interese i mogućnosti različitih skupina učenika. Kroz praćenje učeničke interakcije u suradničkim grupama učitelji su provjeravali koliko su učenici razumjeli bitne pojmove i pomagali su im kada su pogriješili. Nakon toga učenicima se individualno, bez interakcije s učiteljem i drugim učenicima omogućilo samostalno vježbanje zadataka (Styers i Baird-Wilkerson, 2011).

Iako je prema Rutt i sur. (2014) Uхвати broj (Catch Up® Numeracy) strukturirana individualna intervencija namijenjena individualnom poučavanju učenika (jedan učitelj na

jednog učenika), dio nastavnih aktivnost nije bio ostvaren pojedinačno, nego u paru ili manjim grupama. *Učenje u paru* omogućilo je učenicima s teškoćama usvajanje matematičkih sadržaja te je poboljšalo matematička postignuća, motivaciju učenika za matematičke sadržaje, pozitivniji stav prema rješavanju matematičkih zadataka. Učenici su pokazali veću kontrolu nad svojim učenjem, osjećali su veće samopouzdanje i bili su samostalniji u učenju. Osim toga, u parovima su učenici rješavali problemske zadatke riječima koji zahtijevaju zaključivanje. Za svaki zadatak učenici su dobili kopiju zadanog problema u kojoj su mogli prikazati svoje rješenje zadatka te postaviti sličan problem svom paru (Fuchs i sur., 2016).

Suradničko učenje važna je značajka kvalitetne nastave matematike. U akcijskom istraživanju suradničko učenje i učenje u paru bilo je ostvareno pri rješavanju problemskih zadataka i u matematičkim igrama. Kako bi suradničko učenje bilo uspješno, nastojala sam stvoriti pozitivne odnose među učenicima.

4.2.4. Povratne informacije

Hattie (2009) je u svojoj revolucionarnoj studiji „Vidljivo učenje“ rangirao 138 utjecaja koji su povezani s ishodom učenja od vrlo pozitivnih do vrlo negativnih učinaka (ažurirana lista sadrži 252 čimbenika). Utvrdio je da prosječna veličina učinka svih intervencija iznosi 0,40. On smatra da čimbenici imaju visok utjecaj ako je njihov koeficijent efekta učinka iznad 0,4, a među njima se nalazi i povratna informacija s vrijednošću od 0,7.

Hattie i Timperley (2007) ističu da učinkovite povratne informacije odgovaraju na tri pitanja: Kamo idem? (pojasniti ciljeve), Kako napredujem? (dati povratnu informaciju) i Što je sljedeće? (izbor narednih odgovarajućih izazova). Kritični aspekt povratnih informacija jesu informacije dane učenicima i njihovim učiteljima o postizanju ciljeva učenja povezanih sa zadatkom ili izvedbom. Prema Hattie i Timperley (2007) ciljevi obično uključuju dvije dimenzije: predanost i izazov. Ciljevi su učinkovitiji kada se učenici obvežu ispuniti ih i tad je vjerojatnije da će tražiti i primiti povratnu informaciju. Izazovni ciljevi informiraju pojedince o tome koju vrstu ili razinu izvedbe trebaju ostvariti te koje naredne ciljeve mogu postići. Povratne informacije primatelju omogućuju postavljanje razumnih ciljeva i praćenje ostvarenog napretka. Povratne informacije omogućavaju učenicima postavljanje daljnjih izazovnih ciljeva, čime se uspostavljaju uvjeti za kontinuirano učenje. Učenici trebaju odgovor i o tome kako napreduju, premda im taj odgovor ponekad i ne odgovara. Međutim, važno je dati im povratnu informaciju o tome što je sljedeće, odnosno uputiti ih na izbor narednih izazova. Odgovori na

ova pitanja, tj. ove povratne informacije doprinose učinkovitosti učeničkog učenja. Povratna informacija trebala bi premostiti jaz između trenutne razine razumijevanja ili izvedbe učenika i očekivane razine izvedbe koju nazivamo kriterijem uspjeha.

Hattie (2012) predlaže model povratnih informacija koji razlikuje četiri razine: (1) povratne informacije o zadatku (kao što su povratne informacije o tome jesu li odgovori bili ispravni ili pogrešni ili upute za dobivanje više informacija), (2) povratne informacije o postupku rješavanja zadatka (kao što su povratne informacije o korištenim strategijama ili strategijama koje bi se mogle koristiti), (3) povratne informacije o samoregulaciji (kao što su povratne informacije o praćenju svog napretka i regulaciji učenja usmjerenog na ostvarivanje postavljenih ciljeva) i (4) povratne informacije o učeniku kao osobi. Na temelju kvalitetne povratne informacije učenik može dalje planirati postupke i može postavljati ciljeve. S druge strane i učitelj ima jasniji uvid kako napreduju učenici i na koji način treba prilagoditi proces poučavanja. Prema Hattieu i Timperley (2007) povratna informacija odnosi se na različite aspekte nečije izvedbe ili razumijevanja, a može biti dobivena od strane učitelja, učenika, roditelja, udžbenika ili samoga sebe.

Prema Brookhart (2008) povratne su informacije učinkovite ako su učenici motivirani za učenje. Povratna informacija u obrazovnom procesu treba pomoći učeniku kako bi nešto bolje naučio, ali i da bude svjestan odgovornosti za svoj uspjeh. Ona ne treba predstavljati kritiku, ni pohvalu, već treba obuhvaćati set informacija koje će pomoći učeniku da njeguje odgovarajuće ponašanje, uputiti ga kako popraviti greške i dalje se razvijati. Tako učenik postaje svjestan svojih dostignuća i očekivanja koja mu se postavljaju, što mu u velikoj mjeri omogućava planirati daljnji razvoj koji je osnovni cilj svakog procesa učenja.

Zastupljenost ove značajke učinkovite nastave matematike potvrđuju i rezultati pet istraživanja: Baker i sur. (2015), Faber i sur. (2018), Fuchs i sur. (2013), Gersten i sur. (2015), Tsuei (2012). Kvalitativnom analizom utvrđene su dodatne teme koje su zastupljene u svim ili većini navedenih istraživanja. Te teme odnose se na: *cilj učenja i kriterij uspjeha, elaboraciju povratnih informacija, pravovremenost povratnih informacija i ostvarenost povratnih informacija putem digitalnih alata.*

Povratne informacije usmjerene na *ciljeve učenja i kriterije uspjeha* pokazale su se djelotvornijima od onih koje su usmjerene na učenikovu osobnost. Odnosno, „povratne informacije koje usmjeravaju pažnju na zadatak učenja mogu biti učinkovite, dok usmjeravanje pozornosti na samog učenika kao osobu ne pokazuje djelotvornost“ (Faber i sur., 2018, str. 2). Učiteljima su se osobito korisnima pokazale one povratne informacije koje su vezane uz

ostvarivanje ciljeva nastave i učenja. Pri tome, učitelji i učenici mogu putem digitalnog alata za formativno vrednovanje primati povratne informacije o napretku u učenju, odnosno primaju ih odmah nakon davanja odgovora. Digitalni alat između ostalog predlaže i uputu za učenje prema određenim ciljevima učenja, a omogućuje učenicima vježbanje samo onih zadataka koji pripadaju istom cilju učenja. Učenici mogu vidjeti kako su ostvarili svaki cilj učenja u odnosu na ostale ciljeve učenja. Povratne informacije omogućuju kreiranje zadataka prilagođenih njihovim sposobnostima i onih koji odgovaraju njihovoj razini izvedbe. Normativne povratne informacije uključuju usporedbu pojedine učenikove izvedbe s određenim ciljem učenja te s izvedbom drugih učenika (Faber i sur., 2018). Alati za digitalno formativno vrednovanje mogu učenicima i učiteljima pružiti povratne informacije u vezi s napretkom svakog učenika (Faber i sur., 2018).

Elaboracija povratnih informacija podrazumijeva njihovu razradu odmah nakon učeničkih odgovora na postavljene zadatke. Alat za formativno vrednovanje nakon prihvaćanja učeničkih odgovora kreira zadatke prilagođene učenikovim postignućima. Razrađene povratne informacije uključuju između ostalog informacije o tome zašto je odgovor točan ili netočan i vode primatelja povratnih informacija u pravom smjeru. Odnosno, poručuju učeniku kako poboljšati učenje ako je odgovor bio pogrešan. Općenito, razrađena povratna informacija učinkovitija je od jednostavnih povratnih informacija (Faber i sur., 2018).

Pravovremenost povratnih informacija odnosi se na vrijeme kada ih pružamo. Učinkovitost neposredne povratne informacije (odmah nakon odgovora) ili odgođene povratne informacije (kasnije, a ne odmah nakon odgovora) ovisi o karakteristikama zadatka. Neposredne povratne informacije čine se najučinkovitijima u zadacima koji su u odnosu na kapacitete učenika složeniji, dok odgođene povratne informacije pokazuju veću djelotvornost pri rješavanju jednostavnijih zadataka. Korištenje računalnih programa u nastavi matematike omogućuje davanje neposrednih povratnih informacija (Tsuei, 2012). Brzina povratnih informacija koje su pružane učenicima računalnim programom imale su pozitivne učinke na postignuća učenika (Tsuei, 2012). Matematičke mini igre omogućuju učenicima trenutnu povratnu informaciju. Osim toga, one omogućuju učenicima stvaranje novih strategija i pravila te opušteno i zabavno učenje (Bakker i sur., 2015). Učinkovitost neposredne povratne informacije (odmah nakon odgovora) ili odgođene povratne informacije (kasnije, a ne odmah nakon odgovora) ovisi o karakteristikama zadatka. Učenje novih sadržaja mora biti povezano s učenikovom trenutnom mrežom znanja i iskustva. Vještine koje se razvijaju generaliziranjem iz konkretnih iskustava omogućile su trenutnu povratnu informaciju učenicima o njihovu postignuću (Gersten i sur.,

2013; Fuchs i sur., 2010). Na kraju, povratne informacije učitelja izgledaju učinkovitije kada se temelje na čestim procjenama (Faber i sur., 2018).

Davanje povratnih informacija putem digitalnih alata u intervenciji koja je podrazumijevala uporabu aplikacije G-matematika za ostvarivanje vršnjačkog poučavanja pozitivno djeluje na učenike kroz motivacijske povratne informaciju koje ih ohrabruju na davanje svog doprinosa grupi. Tijekom računalno podržanog suradničkog učenja učenici na ekranu dobivaju upute o procesu rješavanja problema (Tsuei, 2012). Jedan od digitalnih alata za davanje povratnih informacija jesu mini igre. Bakker i sur. (2015) ističu kako količina vremena i truda koje učenici troše koristeći te igre može predstavljati važan prediktor njihove učinkovitosti (Bakker i sur., 2015). Digitalni alat Snappet također pruža učenicima povratne informacije koje uključuju usporedbu učenikova uspjeha s učinkom ostalih učenika (Faber i sur., 2018).

Davanje povratnih informacija učenicima o njihovu uspjehu u učenju matematike ostvarila sam primjenom digitalnih aplikacija kao što su Plickers te *online* matematičkim igrama. U svojoj nastavi matematike koristila sam povratne informacije usmjerene na ciljeve. To sam ostvarila kreiranjem obrazaca za davanje povratnih informacija i formativno vrednovanje. Formativnim vrednovanjem kontinuirano se prati učeničko napredovanje u svladavanju matematičkih ciljeva. Tu vrstu vrednovanja ostvarila sam korištenjem portfolija (mape) u koje su učenici spremali različite dokumente (domaće zadaće, slike, zadatke za vrednovanje...) koji su pokazivali njihovu aktivnost, napredak i postignuća.

4.2.5. Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja

Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da je proceduralno znanje potrebno izgraditi iz konceptualnog razumijevanja tako da učenici s vremenom postanu vješti i fleksibilno rabe postupke i algoritme dok rješavaju kontekstualne i matematičke problemske zadatke. Piper i sur. (2017) ističu da se matematika često uči nepovezano, pri čemu su učenici potaknuti da pamte standardne algoritme ne uspijevajući shvatiti bit matematike. Oni smatraju da je za učenike najvažnije izgraditi duboko konceptualno razumijevanje matematike pored proceduralne učinkovitosti koje bi se trebalo poučavati korištenjem različitih tehnika. Unatoč tome, Rittle-Johnson i Schneider (2014) smatraju da je proceduralno znanje potrebno za postizanje matematičkih ciljeva. Proceduralno znanje podrazumijeva poznavanje pravila, algoritama i postupaka. Konceptualno znanje je znanje bogato odnosima i temelji se na razumijevanju apstraktnih ideja koje se moraju usvojiti refleksivnim učenjem (Rittle-Johnson i Schneider, 2014). Za razvoj matematičkog

mišljenja važno je podjednaku pozornost posvetiti usvajanju proceduralnog i konceptualnog znanja (NCTM, 2000), a zatim i vrednovanju obiju vrsta znanja.

Zastupljenost ove značajke učinkovite nastave matematike potvrđuju i rezultati pet istraživanja: Bakker i sur. (2015), Fuchs i sur. (2010), Gersten i sur. (2015), Smith i sur. (2013) i Styers i Baird-Wilkerson (2011). Analizom navedenih istraživanja utvrđene su dodatne kategorije koje su zastupljene u svim ili većini navedenih istraživanja: *praksa mentalnih procesa* (proceduralno znanje) i *primjena znanja u novim situacijama* (konceptualno znanje).

Praksa mentalnih procesa (proceduralno znanje) koristi se kod operacija množenja i dijeljenja. Kod operacije množenja važno je činjenično znanje o brojevima, vještina računanja i razumijevanje računskih operacija i odgovarajućih svojstava kao što su komutativnost i distributivnost što se prepoznaje kao deklarativno znanje, proceduralno znanje i konceptualno znanje. Izloženost učenika mini matematičkim igrama omogućuje razvoj prva dva aspekta znanja: činjeničnog znanja o brojevima (deklarativno znanje) i vještine računanja (proceduralno znanje). Osim toga, matematičke mini igre pokazale su i učinkovitost u poticanju razumijevanja matematičkih pojmova (konceptualno znanje). Razumijevanje matematičkih pojmova povezuje se s iskustvenim učenjem kojim učenici mogu naučiti nova znanja i činjenice eksperimentirajući i otkrivajući odgovarajuće strategije za rješavanje problema. Međutim, kako bi se taj proces dogodio potrebna je refleksija koju omogućuje rasprava među učenicima (Bakker i sur., 2015). Matematičke mini igre koje su učenici koristili kombiniranjem učenja kod kuće i raspravom u školi (Bakker i sur., 2015) promicale su učeničko proceduralno i konceptualno znanje. Nadalje, upotrebom konkretnih materijala učenicima je omogućeno prevladavanje zaostajanja u usvajanju matematičkih sadržaja te usvajanje konceptualnog znanja (Smith i sur., 2013; Gersten i sur., 2012). Osim toga, učenici koji postižu lošije rezultate u matematici u malim grupama uče kombinacijom aktivnosti koje potiču proceduralno znanje i eksplicitnom prezentacijom sadržaja čime se postiže bolje razumijevanje matematičkih sadržaja (Styers i Baird-Wilkerson, 2011).

Unapređenje nastave matematike izgrađivanjem proceduralnog i konceptualnog znanja u akcijskom istraživanju ostvareno je stavljanjem većeg naglaska na poučavanje vođenim otkrivanjem. Pri tome, učenicima nije rečeno kako riješiti zadatke, već su trebali uz vođenje sami doći od rješenja problemskih zadataka. Time su učenici trebali naučiti nove postupke i steći konceptualna znanja koja su im trebala omogućiti dugotrajnije pamćenje i dublje razumijevanje matematičkih sadržaja. Nadalje, učenici su u grupama ili parovima rješavali

problemske zadatke za koje u pravilu nema jednog točnog odgovora te su na taj način pokušali postati stvaratelji vlastita znanja.

4.2.6. Uvažavanje učeničkog predznanja

Učinkoviti učitelji trebaju procijeniti i koristiti prethodna znanja učenika i prilagoditi ciljeve nastave interesima učenika. Učitelji trebaju koristiti prethodno znanje učenika kako bi im omogućili napredak vlastitim tempom. Prema Sullivan (2011) postoji šest ključnih principa za učinkovito učenje matematike, a jedan princip jest stvaranje povezanosti s prethodnim znanjem i iskustvima stečenim na prethodnoj nastavi i u svakodnevnom životu. Anthony i Walshaw (2009) također naglašavaju da se nadovezivanjem znanja na postojeće razumijevanje učenika mogu učvrstiti veze između različitih ideja u matematici. Time se mogu izbjeći poteškoće u učenju matematike. McNeil (2015) ističe da su učeničke poteškoće s rješavanjem matematičkih jednadžbi djelomično posljedica neprimjerenog prethodnog znanja i iskustva s računanjem.

Uvažavanje učeničkog predznanja, između ostalih navedenih značajki zastupljeno je u osam istraživanja (ERIA, 2010, 2017; Erol 2018; Gersten i sur., 2015; Konstantopoulos i sur., 2013; McNeil i sur., 2015; Smith i sur., 2013; Torgerson i sur., 2013). Analizom tih radova pronađene su dodatne kategorije *prethodno znanje i nadovezivanje znanja na postojeće razumijevanje* koje su zastupljene u svim ili većini navedenih istraživanja.

Naučene nastavne sadržaje potrebno je integrirati u iduće lekcije. Odnosno, učenje je novih sadržaja potrebno temeljiti na već stvorenoj mreži znanja i iskustva. Učitelj odlučuje o uvođenju novih koncepata nakon dijagnostičke procjene prethodnog znanja učenika. Učitelj potiče učenike na razmišljanje i procjenu vlastita učenja tijekom svake lekcije, učenicima na taj način pomaže u preuzimanju odgovornosti za vlastito učenje te aktivno uključivanje u proces učenja (Torgerson i sur., 2013).

Znanje se treba razvijati u kontinuitetu od konkretnog do apstraktnog (Gersten i sur., 2015). Upravo to čini singapurski model u kojemu se matematički koncepti uče pomoću konkretno-slikovno-apstraktne metode u kojoj se povezuje učenje sa stvarnim svijetom i praktičnim iskustvima. Svako novo poglavlje kurikuluma matematike sadrži aktivnosti koje se temelje na predznanju potrebnom za izgradnju novih koncepata i vještina (ERIA, 2010). Analiza rezultata koje učenici postižu u učenju matematike može poslužiti praćenju ostvarenih promjena u učenju te prilagođavanju nastave mogućnostima učenika (Konstantopoulos i sur., 2013). Intervencije koje se temelje na procjeni učeničkog predznanja daju važne povratne informacije učiteljima.

Učitelji na temelju poznavanja prethodnog znanja svojih učenika mogu primjereno intervenirati na razini učenika, razreda ili škole kako bi poboljšali učenička postignuća iz matematike. „Privremene procjene prethodnog znanja mogu biti korisne u redizajnu lekcija, modificiranju nastave i pripremi učenika za standardizirano testiranje“ (Konstantopoulos i sur., 2013, str. 485). Učitelji nakon testiranja znanja prethodnog razreda imaju pristup rezultatima svojih učenika. Privremene procjene utvrđuju područja koja je potrebno poboljšati, a učitelji kao i sama institucija koriste te podatke i provode odgovarajuće postupke kako bi ciljano poboljšali postignuća učenika iz matematike. Pri rješavanju problemskih zadataka potrebno je prvo ponoviti ono što su učenici prethodno naučili, a tek onda se mogu suočiti s novim zadacima i njihovom primjenom u svakodnevnom životu (Erol, 2015).

U intervenciji Matematički oporavak učitelj poznajući faze ranog učenja matematike gradi profil učenikova predznanja. Taj je profil kritičan pri učiteljevu izboru specifičnih nastavnih sadržaja i aktivnosti prilagođenih učenicima koji imaju teškoće u učenju matematike. U profilu je navedena trenutna razina znanja pojedinog učenika s time da se naredna faza učenja temelji na zapažanju ostvarenom tijekom nastave (Smith i sur., 2013).

U akcijskom istraživanju provela sam ispite na početku godine čime je utvrđeno učeničko predznanje. Tijekom školske godine koristila sam kvizove koji su mi na brz i lak način pružili uvid u predznanje učenika. Prikupljene informacije koristila sam za planiranje diferenciranog učenja i korigiranje nedostataka u matematičkom znanju nastojeći omogućiti napredak svakom učeniku u skladu s njegovim mogućnostima. Osim toga, učenici su izrađivali svoje matematičke portfolije u koje su bilježili sve svoje uspjehe i sami pratili svoj napredak u matematici. Na kraju, organiziranjem razrednih rasprava učenici su iznosili svoje matematičke ideje i predznanja. Time su mogli preispitati svoje predznanje te promišljati kako ga nadograditi.

4.3. Zaključak

Ovaj sustavni pregled temelji se na izboru 19 intervencija prema unaprijed postavljenim kriterijima. Cilj sustavnog pregleda literature bio je uključiti sve eksperimentalne i kvaziekperimentalne studije objavljene u razdoblju od 2010. do 2019. godine. Većina studija (13) provedena je u razdoblju od 2010. do 2015. godine, a ostalih šest studija između 2015. i 2019. godine. U izbor su uvrštena eksperimentalna i kvaziekperimentalna istraživanja u kojima je barem jedan efekt učinka na učeničke rezultate iz matematike bio statistički značajan (Lipsey i sur., 2012). Većina istraživanja provedena je u SAD-u (10), a zatim u Nizozemskoj (4),

Engleskoj (3), Turskoj (1) i Taiwanu (1). Premda je većina istraživanja provedena u SAD-u pronađene su učinkovite intervencije i u drugim zemljama (Taiwan, Turska, Nizozemska, Engleska) tako da se zaključci ne odnose samo na američki obrazovni sustav, već i na sustave drugih zemalja.

U izabranim sam radovima na temelju dodatne analize utvrdila zastupljenost značajki učinkovite nastave matematike (Jukić Matić i sur., 2020). Analizirajući navedena istraživanja izdvojila sam samo one značajke koje su uključene u intervencije, a ne u teorijska razmatranja (tablica 5). U izabranim radovima utvrđena je prisutnost sljedećih značajki: *suradničko učenje, nastavna tehnologija, zadatci koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, povratne informacije, uvažavanje učeničkog predznanja i izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja*. Ostale navedene značajke učinkovite nastave u manjoj su mjeri zastupljene u navedenim istraživanjima iako su uočene u dijelu provedenih intervencija u nastavi matematike.

Na temelju analize intervencija uključenih u sustavni pregled literature može se zaključiti kako nije dovoljno primjenjivati jednu učinkovitu značajku u nastavi matematike, već ih je potrebno uključiti i kombinirati nekoliko. Na primjer, uz primjenu tehnologije u nekim istraživanjima došlo je do izražaja i suradničko učenje (Tsuei, 2015; de Kock i Harskamp, 2014). Osim toga, računalni programi mogu se koristiti i u razvijanju metakognitivnih vještina kao i u angažiranju učenika u strukturiranom predstavljanju problemskih zadataka. Prosječno je utvrđeno korištenje 2,5 značajki po intervenciji što upućuje na to da učenici trebaju biti izloženi utjecaju dviju ili više različitih značajki učinkovite nastave matematike kako bi se postigli bolji rezultati u učenju.

Rješavanjem problemskih zadataka učenici razmišljaju, povezuju matematičke sadržaje sa svakodnevnim životom, logički povezuju različite aspekte matematičkog znanja. Osim toga, učenici razvijaju kreativnost, metakogniciju, sustavnost i logičko zaključivanje te razvijaju kompetencije važne za svakodnevni život. Zadatci koji promiču rješavanje problema važni su jer uvažavaju učeničku znatiželju i interes za otkrivanjem novih znanja. Važno je da učitelji upoznaju učenike sa strategijama rješavanja problema vodeći računa o individualnim razlikama u predznanju i motiviranosti za matematičke sadržaje. U takvoj nastavi učenik može preuzeti odgovornost za pronalaženje vlastita pristupa u postavljanju i rješavanju zadataka. Uključivanjem problemskih zadataka u svakodnevnu nastavu razvija se učeničko kritičko procjenjivanje problemskih situacija (deKock i Harskamp, 2014). Suradničko učenje koje se

može ostvariti komuniciranjem putem čavrljanja ili kroz razredne rasprave ključan je preduvjet za napredak u rješavanju problemskih zadataka.

Prema Sullivan (2011) učitelji trebaju uvažavati učeničko matematičko predznanje. To se može postići povezivanjem njihova predznanja sa sadržajem zadataka riječima što istovremeno kontekstualizira učenje matematike te motivira učenike na učenje. Učitelji trebaju graditi veze između lekcija te koristiti podatke o učeničkom predznanju za učenje novih sadržaja. Anthony i Walshaw (2009) naglašavaju da se nadovezivanjem znanja na postojeće razumijevanje učenika mogu ojačati veze između različitih ideja u matematici. Prethodno znanje smatra se važnim čimbenikom koji utječe na postignuća i učenje učenika. Količina i kvaliteta prethodnog znanja pozitivno utječu na stjecanje novih znanja te na primjenu tog znanja u životnim situacijama. Utvrđivanjem učeničkog predznanja učitelji mogu primjereno intervenirati kako bi poboljšali učenička postignuća iz matematike. Privremene procjene prethodnog znanja mogu biti korisne u osmišljavanju i mijenjanju nastave te u pripremi učenika za testove.

Jukić Matić i sur. (2020) tehnologiju smatraju važnom za predstavljanje matematičkih koncepata na dinamičan i vizualno privlačan način koji motivira učenike na učenje. Tehnologija omogućuje učenicima brži pristup raznovrsnim materijalima. Nažalost tehnologija se ne koristi često u nastavi matematike. To potvrđuju rezultati istraživanja deKock i Harskamp (2014) što sugerira da je potrebno integrirati računalne programe u svakodnevnu nastavu matematike. Rezultati istraživanja pokazuju da primjena tehnologije može imati pozitivan utjecaj ako se koristi na odgovarajući način. Ako se želi postići pozitivan utjecaj tehnologije na postignuća učenika iz matematike, učitelji trebaju procijeniti i odabrati računalne programe koji omogućuju kvalitetno učenje matematičkih sadržaja, umjesto da nastavu matematike učine zabavnijom. Primjena tehnologije često je prisutna u obrazovnim matematičkim programima i zastupljena je u većem broju intervencija (Baker i sur, 2015; de Kock i Harskamp 2014; Erol, 2018; Faber i sur., 2018; Fuchs i sur., 2016; Konstantopoulos i sur., 2013; Tsuei, 2012 i Worth i sur., 2016). Iako je korištenje tehnologije zastupljeno u većini studija i dalje nije moguće zaključiti da tehnologija sama po sebi pridonosi povećanju učeničkih postignuća iz matematike. Premda učenici mogu naučiti kvalitetno manipulirati računalnim programima, oni možda neće steći znanje o matematičkim pojmovima. „Štoviše, neki učenici radije pogađaju odgovore, umjesto da iskoriste multimedijske značajke te nauče riješiti problem iz matematike“ (Tsuei, 2012, str. 1172).

Elaborirana povratna informacija pokazala se učinkovitijom od jednostavne povratne informacije jer usmjerava učenika na razumijevanje matematičkih pojmova, upućuje na

pogreške u zaključivanju i kako ih prevladati te kako poboljšati svoje učenje (Fabber i sur, 2018). Računalni programi, a posebno mini igre u nastavi matematike omogućuju neposredne povratne informacije što može imati pozitivan učinak na postignuća učenika (Tsuei, 2012).

Na temelju provedene analize moguće je zaključiti kako je dobra ideja primijeniti širi spektar značajki učinkovite nastave. Time se može postići da nastava postane dinamičnijom i prilagođenijom različitim mogućnostima i interesima učenika. Posebno je važno pomoći učenicima s poteškoćama u učenju da i oni postignu napredak u učenju. Promjene u nastavi potrebno je uvoditi postupno, počevši od jednostavnih, prema složenijima. Kako bi se ostvarile promjene u nastavi matematike potrebno je učenicima omogućiti samostalno izgrađivanje znanja na temelju vlastite aktivnosti i iskustva u rješavanju zadataka koji ih potiču na zaključivanje i primjenu naučenog u svakodnevnom životu. To se prije svega odnosi na problemsko učenje potpomognuto primjenom informacijsko-komunikacijske tehnologije.

5. AKCIJSKO ISTRAŽIVANJE

5.1. Metodologija

Cohen i sur. (2007) definiraju akcijsko istraživanje kao: „manju intervenciju u funkcioniranje stvarnog svijeta i detaljno ispitivanje učinka takve intervencije. Markowitz (2011, str. 12) smatra da je „akcijsko istraživanje temeljna strategija profesionalnog rasta koju se može općenito definirati kao individualno ili skupno ispitivanje vlastite profesionalne prakse u svrhu samounapređivanja, čime se povećava vjerojatnost uspješnijeg učenja učenika“. Lewin ističe u procesu akcijskog istraživanja četiri glavne faze: planiranje, djelovanje, promatranje i refleksiju (Cohen, Manion i Marisson, 2007, str. 234). Također smatra da su sve faze važne za cjelokupan proces akcijskog istraživanja. McNiff i Whitehead (2010) tumače da akcijsko istraživanje podrazumijeva pronalaženje načina za poboljšanje prakse, a praksa se shvaća kao akcija i istraživanje.

Na temelju utvrđenih značajki kvalitetne nastave matematike u sustavnom pregledu literature nastojala sam uvesti promjene u nastavu matematike tijekom prvog odgojnog i obrazovnog razdoblja u 2021./2022. školskoj godini. Pri tome sam nastojala razumjeti, opisati i interpretirati procese koji se događaju kod učenika na nastavi kao i u meni samoj koristeći se kvalitativnim i kvantitativnim podacima.

Suvremena nastava temelji se na konstruktivističkom pristupu u kojem je učenik u središtu odgojno-obrazovnog procesa. Dunphy i sur. (2014) definiraju konstruktivizam kao teoriju o znanju i učenju. Iz perspektive konstruktivista učenje se promatra kao proces u kojemu učenici „konstruiraju svoje iskustvo, tj. pojedinci konstruiraju vlastite načine spoznaje“ (Dunphy i sur., 2014, str. 47).

Taylor (2013) ističe za matematiku da je to apstraktna znanost o brojevima, količini i prostoru. Premda se matematika učenicima može činiti apstraktnom, ona je često primjenjiva u svakodnevnom životu. Matematika je usmjerena na razvoj logičko-matematičkog mišljenja, ima važnu ulogu u formiranju ličnosti te stvara kompetentnog pojedinca koji primjenjuje matematičko znanje u svakodnevnom životu. Ponajprije je važno prema matematici razvijati pozitivan stav, a matematičko znanje treba graditi kroz primjerena matematička iskustva. Osim toga, potrebno je učenike poticati na smisljeno učenje kao i rješavanje matematičkih problema.

Ono čemu sam težila u svojoj nastavi bilo je da učenicima nastavu učinim zanimljivom te da odlaze iz škole s osmjesima na licima. Međutim, tijekom svog radnog iskustva nisam to uvijek uspijevala ostvariti, a to se osobito odnosilo na nastavu matematike.

5.1.1. Kontekst akcijskog istraživanja

Na mjestu učiteljice razredne nastave zaposlena sam trinaest godina u Osnovnoj školi Hinka Juhna Podgorač, Podgorač i to u Područnoj školi Budimci. Ta škola osnovana je prije stotinjak godina. Nova školska zgrada u Budimcima izgrađena je 2007. godine (slika 32). Osnova škola Hinka Juhna Podgorač u svom sastavu osim područne škole Budimci ima još i područne razredne odjele u Razbojištu, Stipanovcima i Poganovcima. Predmetnu nastavu učenici spomenutih sela pohađaju u matičnoj školi Podgorač. Škola ima 51 zaposlenog djelatnika. Ravnateljica škole je Zdenka Vukomanović koja je podržala provedbu ovog istraživanja.



Slika 32. Područna škola Budimci



Slika 33. Učionica kombiniranog odjela 2. i 3. razreda

U učionici (slika 33) smo na raspolaganju imali tri računala (laptopa), dva tableta, LCD projektor i platno te je bio omogućen pristup internetu. To znači da su postojali preduvjeti za korištenje tehnologije u nastavi i *online* suradnju s kritičkim prijateljima.

Svoje akcijsko istraživanje provela sam u kombiniranom odjelu 2. i 3. razreda. Kombinirani razredni odjel brojio je šest učenika, s time da su u oba razreda bila po tri učenika. Nastavu su pohađale tri djevojčice i tri dječaka. Pet učenika pohađalo je nastavu po redovitom planu i programu, dok je jedna učenica pohađala nastavu po prilagođenom programu iz svih obrazovnih i odgojnih predmeta osim tjelesne i zdravstvene kulture. Područna škola ima još dva razredna odjela.

5.1.2. Polazne vrijednosti

McNiff i Whitehead (2010) ističu kako vrijednosti predstavljaju kriterije za procjenu kvalitete prakse. Dakle, na početku istraživanja utvrdila sam vrijednosti na kojima sam temeljila promjene u nastavi. To su *odgovornost i samostalnost u učenju, aktivno sudjelovanje u nastavnom procesu, suradnja među učenicima i napredovanje u matematici*. Ono čemu sam težila u svojoj nastavi bilo je da učenicima nastavu učinim zanimljivom te da odlaze iz škole s osmjesima na licima. Međutim, tijekom svog radnog iskustva nisam to uvijek uspjela ostvariti, a to se osobito odnosilo na nastavu matematike.

Promatrajući svoje učenike za vrijeme nastave matematike i kroz različite aktivnosti koje sam im inače zadavala uvidjela samo da nisu samostalni. Zbog toga sam ih nastojala više osamostaliti u nastavi matematike, a posebno u rješavanju problemskih zadataka. Samostalno učenje Livingston (2012) definira kao metodu ili proces učenja u kojem učenici imaju vlasništvo i kontrolu nad svojim učenjem te usmjeravaju i procjenjuju vlastito učenje. Samostalan učenik postavlja ciljeve, donosi izbore i odluke o tome kako zadovoljiti svoje obrazovne interese, kako preuzeti odgovornost za vlastito učenje, pratiti napredak u postizanju ciljeva i samostalno vrednovati ishode učenja.

Druga bitna vrijednost koju sam nastojala afirmirati u svojoj praksi bila je aktivno učenje učenika u nastavi matematike. Nikčević-Milković (2004, str. 47) navodi da „aktivno učenje podrazumijeva znati kako djelotvorno učiti, stvoriti potrebu za učenjem kao cjeloživotnim obrazovanjem i znati kritički misliti“. Kyriacou (1992, str. 56) ističe za aktivno učenje da su to

aktivnosti u kojima se učenicima osigurava visok stupanj samostalnosti i nadzora nad organizacijom, tijekom i smjerom aktivnosti. Takve aktivnosti najčešće obuhvaćaju rješavanje problema i

istraživački rad, a mogu se individualizirati (npr. prošireno istraživanje ili projekt) ili proširiti u suradnju (npr. rasprava, dramatizacija ili suradnički projekti).

Osim toga, aktivno je učenje intelektualno poticajno, pomaže u razvoju vještina u kojima će učenik vjerojatno uživati jer mu omogućuje napredak (Kyriacou, 1992).

Watkins i sur. (2007) u tumačenju aktivnog učenja usmjeravaju se na mentalne aktivnosti u kojima se učenika angažira dok konstruira novo značenje. Aktivnim učenjem učenik konstruira svoje znanje koje nije pasivno primljeno iz okoline. Kada učenik stvara svoje znanje on u većoj mjeri uči dok je pasivno slušanje objašnjenja drugih ljudi manje povezano s učenjem.

Osim prethodno navedenih vrijednosti, kod učenika sam nastojala potaknuti i suradnju. Na Hattiejevoj listi koja sadrži više od 250 čimbenika suradničko učenje u usporedbi s individualnim doseže veličinu učinka od 0,55 (<https://visible-learning.org/wp-content/uploads/2018/03/VLPLUS-252-Influences-Hattie-ranking-DEC-2017.pdf>). Kyndt i sur. (2013) utvrdili su tri statistički značajne moderirajuće varijable koje utječu na veličinu učinka suradničkog učenja. One su povezane s područjem učenja (suradničko je učenje učinkovitije u prirodoslovlju i matematici nego u jezičnom području i društvenim znanostima), dobi učenika (učenici u osnovnoj školi postižu bolje rezultate nego u srednjoj školi) i njihovom kulturnom pozadinom (suradničko je učenje manje učinkovito u zapadnjačkim kulturama). Suradnju među učenicima kao jedan od kvalitetnih aspekata odgojno-obrazovnog sustava nužno je što češće poticati i ostvarivati. Reić-Ercegovac i Jukić (2008) u svom istraživanju utvrdile su da suradnja u nastavi nije dovoljno zastupljena te da je učitelji razredne nastave primjenjuju samo nekoliko puta mjesečno. Peko i sur. (2006) utvrdili su da suradničko učenje ostvareno metodom slagalice potiče učenike na aktivnost i odgovornosti za svoje napredovanje u matematici.

Učenje mora početi s temeljnim konceptualnim razumijevanjem, vještinama i matematičkim rječnikom. Uz odgovarajuće upute o tome kako povezati i proširiti ideje, površinsko učenje pretvara se u duboko učenje (Hattie, 2017). Duboko učenje važan je temelj kojim učenici mogu primijeniti ono što su naučili u novim situacijama. Ako su učenici sposobni postaviti svoja očekivanja, samostalno pratiti i predvidjeti ili samostalno izvještavati o vlastitom postignuću, učenje je postignuto. Sve te faze mogu biti prisutne tijekom učenja, ali se mogu s vremenom proširiti. Hattie (2009) smatra da učenici moraju znati svrhu svog učenja kao i sposobnost praćenja svog napretka u učenju matematike. Učitelji trebaju poticati učenike da napreduju u učenju. U svojim istraživanjima Hattie je postavio naglasak na vidljivo učenje koje to postaje ako se fokusira na utjecaje koji se temelje na dokazima. Hattie (2012, 2017) smatra da učenje

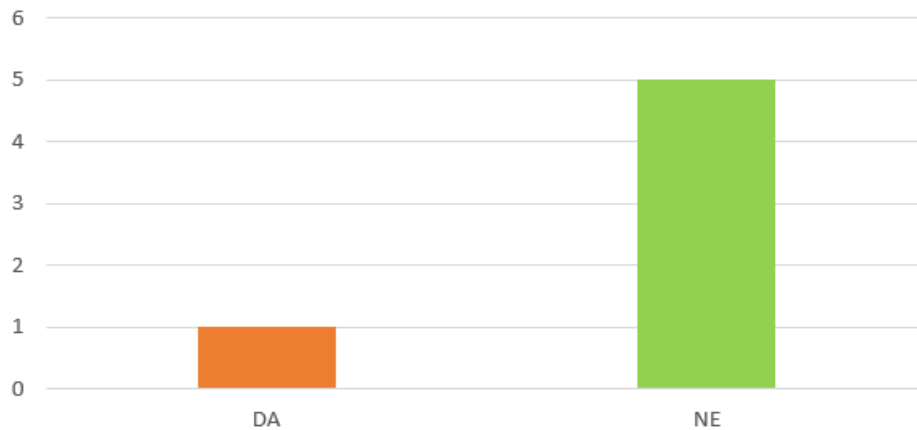
postaje vidljivo kada učitelji postanu aktivni učenici i kada učenici razviju attribute samoučenja dok postaju sami sebi učitelji.

5.1.3. Problem akcijskog istraživanja

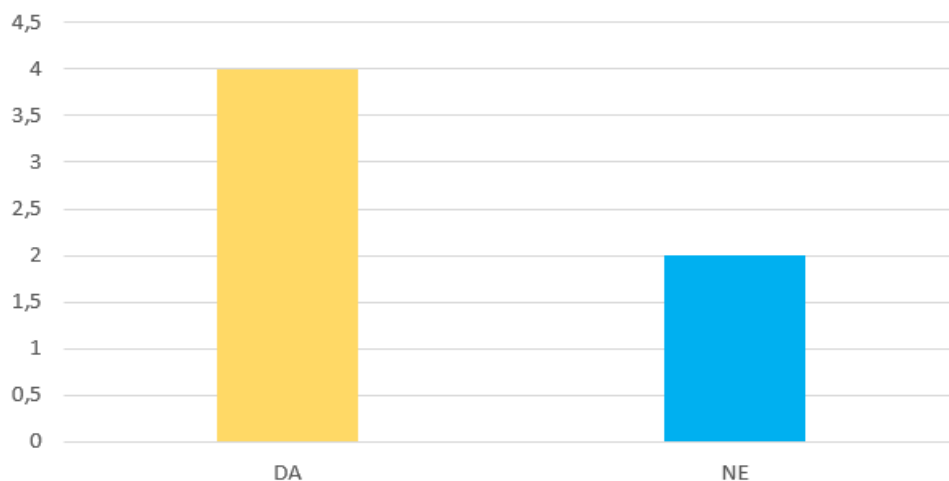
U nastavi koju sam vodila prije ovog akcijskog istraživanja učenici su rijetko učili unutar grupa bilo homogenih ili heterogenih. Nije im bilo omogućeno usmeno osmišljavanje problemskih zadataka jer su se koristili samo udžbenicima, radnim bilježnicama i zbirka zadataka. Na početku sam provela anketni upitnik (Prilog 3) s učenicima kako bih saznala jesu li zadovoljni dotadašnjom nastavom matematike. Osim toga, htjela sam otkriti je li im nastava matematike zanimljiva, koji oblici rada prevladavaju na nastavi matematike i na koji način najčešće rješavaju zadatke iz matematike. Anketu su ispunili učenici obaju razreda. Toga dana u školi je bilo svih šest učenika.

Svi učenici odgovorili su da im je nastava matematike zanimljiva. Zanimao me razlog zbog kojeg su svi zaokružili pozitivan odgovor. Nakon razgovora s njima otkrila sam da im je nastava matematike zanimljiva zbog korištenja igara u nastavi matematike, pozitivnog nastavnog ozračja, ugodne atmosfere koja je prisutna u razredu. Svi su se učenici na nastavi matematike osjećali ugodno što upućuje na zaključak da je emocionalna klima na nastavi matematike bila povoljna. Bognar i Matijević (2005) smatraju da se razlike u emocionalnoj klimi očituju kao osjećaj ugone ili osjećaj neugode kod sudionika odgojno-obrazovnog procesa. Osjećaju ugone može doprinijeti zanimljiva nastava. Međutim, zanimljiva nastava ne mora nužno značiti da je i kvalitetna. Premda je nastava matematike učenicima bila zanimljiva, čini se kako je njihov misaoni angažman u rješavanju matematičkih zadataka bio slabije zastupljen.

Sljedeća tvrdnja odnosila se na socijalne oblike nastave. Učenici su trebali odgovoriti uče li ili ne uče često u skupinama. Prema njihovim odgovorima većina ih smatra da ne uče često u skupinama (slika 34). Suradnja je jedan od važnih aspekata obrazovanja pa se treba što češće poticati i ostvarivati. Jukić Matić i sur. (2020) smatraju da učitelj treba omogućiti suradnju među učenicima te da učenici trebaju učiti u malim grupama kako bi mogli razgovarati o važnim matematičkim idejama.



Slika 34. Odgovori učenika na tvrdnju: Na nastavi matematike često učimo u skupinama



Slika 35. Odgovori učenika na tvrdnju: Na nastavi matematike najčešće rješavamo samostalno zadatke iz udžbenika i radne bilježnice

Pretposljednja tvrdnja odnosila se na način rješavanja zadataka iz matematike za vrijeme nastave. Četiri učenika smatraju da na nastavi matematike najčešće rješavaju zadatke iz udžbenika i radne bilježnice, dok dva učenika smatraju da zadatke rješavaju i na druge načine (slika 35).

Posljednje pitanje bilo je otvorenog tipa. U njemu su učenici trebali napisati što im se najviše sviđa, a što ne sviđa na nastavi matematike. Ovo su neki od odgovora:

- Sviđa mi se kada radimo u paru.
- Meni se najviše sviđa kada rješavamo zadatke pred pločom.
- Mani se sviđa kada se natječemo u provjeri znanja.

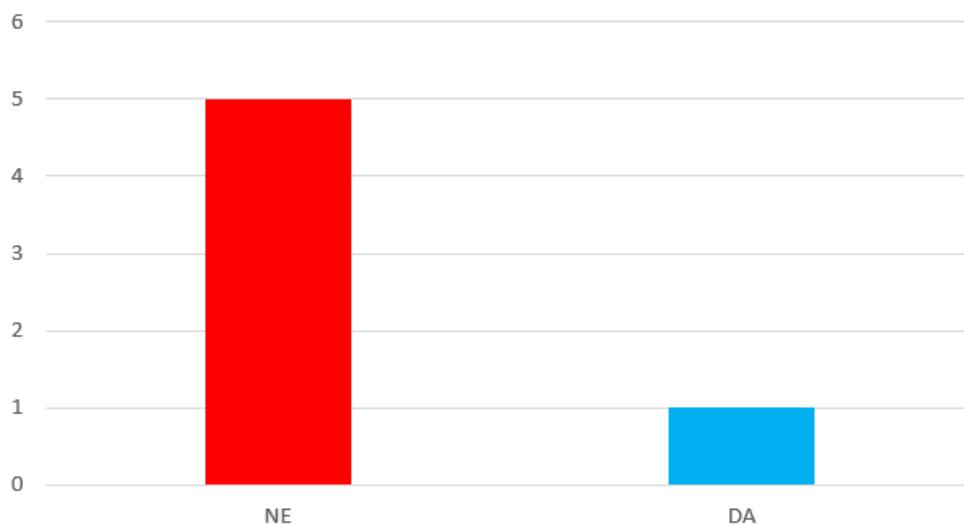
Sviđa mi se kada učiteljica sama osmisli zadatke i onda te zadatke rješavamo. (Učenici, osobna komunikacija, 6. rujna 2021.).

Ponekad je dosadno na nastavi i zadatci su teški.

Nastava mi je dosadna.

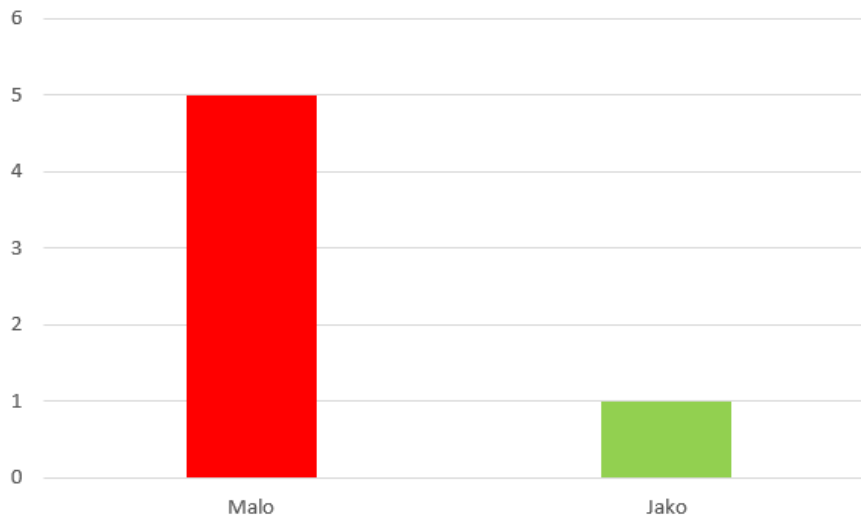
Učiteljica preopširno objašnjava rješavanje zadataka, treba to sve pojednostaviti. (Učenici, osobna komunikacija, 6. rujna 2021.).

Osim s učenicima, anketu sam provela i s roditeljima (Prilog 4). Poruka koju su mi roditelji uputili svojim odgovorima na postavljeno pitanje u svezi s učenjem matematike bila je više nego očita.



Slika 36. Odgovori roditelja na pitanje: Smatrate li da je vaše dijete motivirano za učenje nastavnih sadržaja iz matematike?

Na postavljeno pitanje smatrate li da je vaše dijete motivirano za učenje nastavnih sadržaja iz matematike čak pet od šest roditelja odgovorilo je da njihova djeca nisu dovoljno motivirana za učenje nastavnih sadržaja iz matematike (slika 36). To za mene nije bilo iznenađenje jer su učenici bili poučavani tradicionalnim načinom, a rješavanje zadataka iz udžbenika i radne bilježnice nije ih u većoj mjeri motiviralo na učenje matematike.



Slika 37. Odgovori roditelja na pitanje: Napreduje li vaše dijete u učenju matematike?

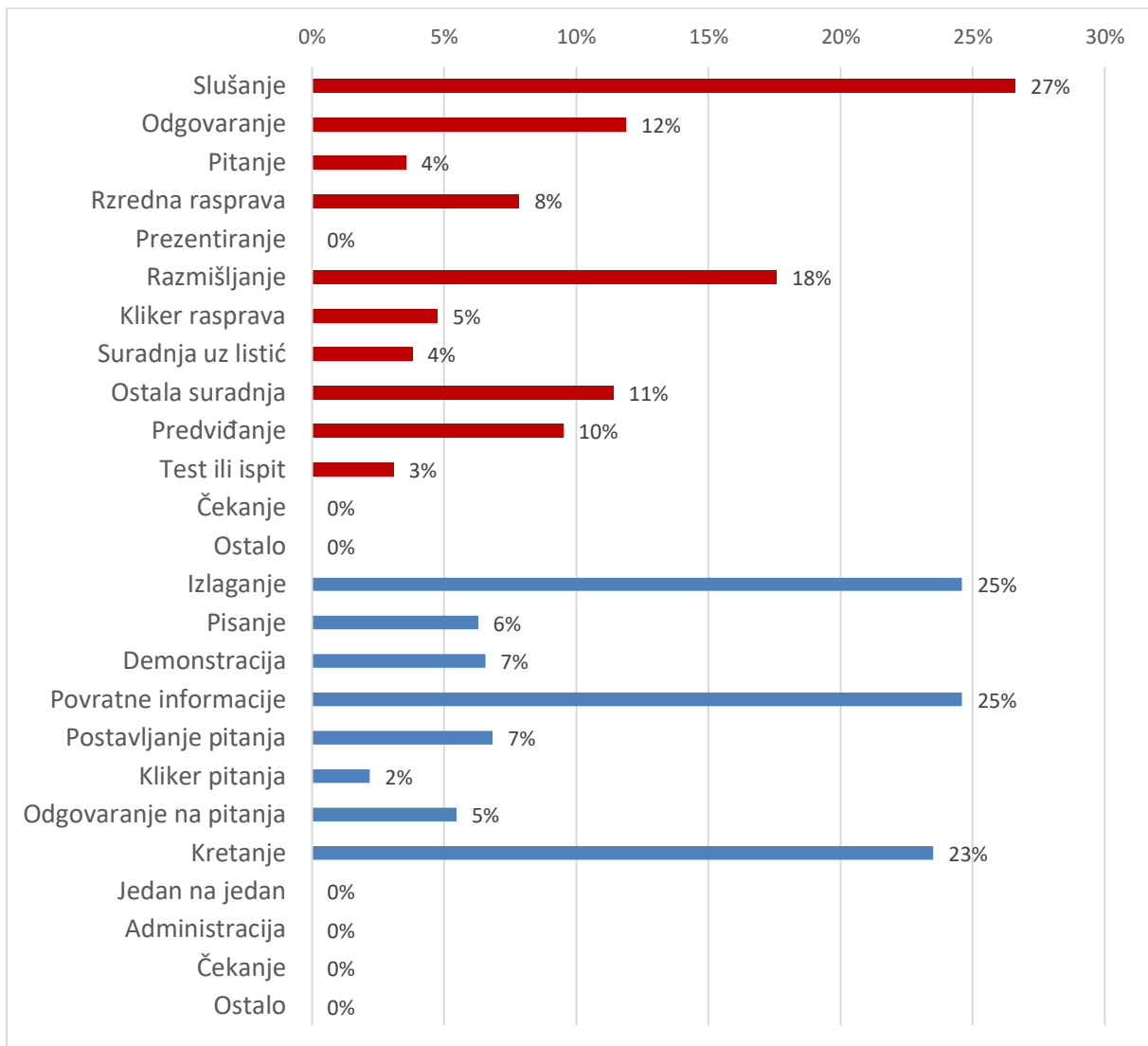
Rezultati anketnog upitnika provedenog s roditeljima pokazali su da većina roditelja smatra kako njihova djeca ne napreduju na nastavi matematike (slika 37). Osim toga, roditelji smatraju da njihova djeca pokazuju nezainteresiranost u učenju matematičkih sadržaja. Rezultati ankete provedene s roditeljima upućuju na to da postoji dosta prostora za unapređenje polaznih vrijednosti, a i odgovori učenika potaknuli su me da unesem promjene u nastavu matematike i učinim ju kvalitetnijom.

Premda sam nastavu matematike nastojala učenicima učiniti zanimljivom, vrlo često ona se temeljila na suhoparnom rješavanju matematičkih zadataka kao i korištenju udžbeničkog kompleta koji učenicima nije bio dovoljno zanimljiv. Osim toga, smatrala sam ispravnim, ako učenici ne znaju samostalno riješiti matematičke zadatke, prikazati im točno rješenje na ploči oko čijeg se rješavanja nisu trebali previše truditi. Međutim, taj pristup nije doprinio učeničkom interesu za učenje kao ni značajnijim obrazovnim rezultatima iz matematike.

Da su promjene u mojoj nastavi bile potrebne, ukazuju i rezultati analize snimki prethodno održane nastave matematike koja je provedena pomoću COPUS¹² protokola (Smith i sur., 2013). Analiza je provedena na pet nastavnih sati matematike održanih u travnju, svibnju i lipnju 2019. godine u 3. razredu. Analizirajući nastavu matematike utvrdila sam da su učenici u velikom postotku vođeni, prevladava aktivnost učiteljice kao i njezino kretanje po razredu. Učenici uglavnom slušaju učiteljicu, a nedostaje učeničko postavljanje pitanja, rasprava i

¹² Classroom Observation Protocol for Undergraduate STEM (COPUS).

iznošenje mišljenja. Osim toga manje je zastupljeno njihovo samostalno rješavanje zadataka, aktivno učenje i međusobna suradnja (slika 38).



Slika 38. Analiza učiteljičine i učeničke aktivnosti na inicijalnim snimkama nastave 2019. godine u trećem razredu

Polazeći od navedenih vrijednosti i analize inicijalnog stanja definirala sam problem svog akcijskog istraživanja u obliku akcijsko-istraživačkog pitanja: Kako ostvariti promjene u nastavi matematike na temelju utvrđenih značajki učinkovite nastave matematike u sustavnom pregledu literature?

5.1.4. Planirane aktivnosti

U nastavi koju sam održavala prije ovog akcijskog istraživanja učenici su rijetko učili unutar grupa bilo homogenih ili heterogenih. Nije im bilo omogućeno samostalno osmišljavanje problemskih zadataka jer su se koristili samo udžbenicima, radnim bilježnicama i zbirkama zadataka. Poznajući dosadašnji način realizacije nastavnih sadržaja željela sam mijenjati nastavu matematike uvođenjem učinkovitih nastavnih metoda jer dotadašnji pristup nije doveo učenike do očekivanih obrazovnih rezultata. Planirane promjene temeljile su se na rezultatima istraživanja. Nastojala sam nastavu učiniti dinamičnijom te ju prilagoditi mogućnostima učenika. Osim toga, nastojala sam pomoći učenicima s poteškoćama u učenju matematike kako bi i oni postigli napredak. Kako bi se planirane promjene u nastavi matematike ostvarile nastojala sam omogućiti da do izražaja dođe učenička aktivnosti i samostalnost u izgrađivanju znanja.

Tablica 6. Ciljevi i kriteriji za procjenu uspješnosti istraživanja

CILJEVI ISTRAŽIVANJA	KRITERIJI ZA PROCJENU USPJEŠNOSTI ISTRAŽIVANJA
1. uvažavanje učeničkog predznanja	1. nastavne aktivnosti temelje se na učeničkom predznanju
2. poticanje učenika na rješavanje problemskih zadataka	2.1. učenici rješavaju problemske zadatke primjenom singapurske metode 2.2. učenici rješavaju zadatke koji ih potiču na zaključivanje i rješavanje problema
3. razvijanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja	3.1. učenici razvijaju proceduralno znanje iz konceptualnog razumijevanja rješavanjem problemskih zadataka korištenjem tablice ili grafikona
4. poticanje i razvijanje suradnje među učenicima	3.2. učenici objašnjavaju zašto su neka rješenja zadataka točna ili netočna te na taj način doprinose dubljem razumijevanju naučenog
5. korištenje informacijsko-komunikacijske tehnologije u nastavi matematike	4. učenici surađuju na nastavi matematike i pomažu jedni drugima pri rješavanju zajedničkih zadataka, uvažavaju mišljenja drugih, zajednički pronalaze rješenja
6. davanje kvalitetnih povratnih informacija učenicima	5. učenici na nastavi rabe tehnologiju koja im pomaže u učenju matematike 6.1. učinkovite povratne informacije usmjeravaju učenike prema postavljenim ciljevima 6.2. učenici često dobivaju povratne informacije koje im govore što razumiju i što još trebaju naučiti

U tablici 6 navedeni su ciljevi i kriteriji za procjenu učinjenog prema značajkama kvalitetne nastave matematike. Kriteriji nam pomažu u procjeni ostvarenosti postavljenih ciljeva. U

skladu s ciljevima predvidjela sam sljedeće aktivnosti koje sam provela s učenicima za vrijeme trajanja akcijskog istraživanja:

a) Aktivnosti koje doprinose učenju utemeljenom na *učeničkom predznanju*

Sullivan (2011) smatra da je potrebno procijeniti prethodno znanje učenika i prilagoditi poučavanje potrebama i interesima učenika. Upoznavanjem učeničkog trenutnog znanja te određivanjem razine na kojoj se učenik nalazi mogu se osmisliti sadržaji koje treba poučavati (Campbell, 2008). Prethodno znanje u nastavi matematike može se prikazati pomoću grafičkih organizatora kao što su npr. Vennov dijagram i kognitivna mapa. Tijekom njihove izrade važno je sve dijelove smisljeno povezati i sastaviti ih u pravilne međuodnose.

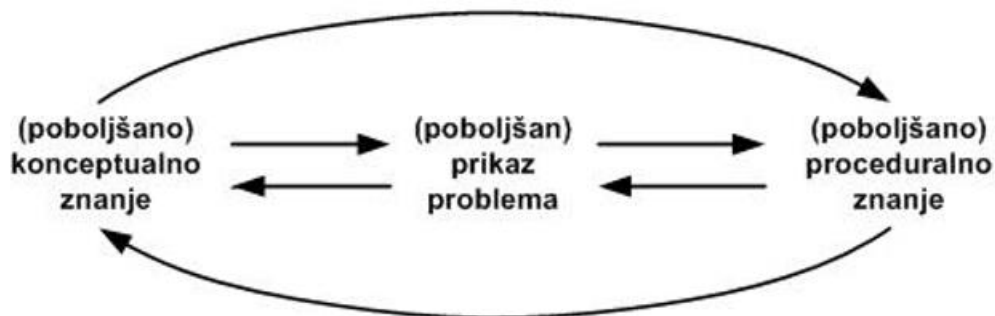
Utvrđivanje prethodnog znanja moguće je ostvariti pisanjem zadanih pojmova u *KWL tablicu* od tri stupca. „KWL tablica je dobila naziv po engleskim nazivima njenog sadržaja, K – know, W – want to know, L – learned. Tablicu i tehniku je osmislila Donna Ogle, a u prijevodu znači Znam – Želim znati – Naučio/la sam“ (Jerbić-Zorc, 2018, str. 17). Učenici u obrazac upisuju informaciju koju znaju, informaciju koju misle da znaju i jednu informaciju koju trebaju ili bi željeli znati. Ispunjeni obrazac može se kasnije upotrijebiti u vođenju učeničkog dnevnika učenja (Campbell, 2008).

Kako bi se aktiviralo prethodno znanje potrebno je koristiti strategije koje uključuju čitanje, pisanje, raspravljanje, glasno razmišljanje. Učenici mogu podatke prikazivati grafičkim organizatorom kao što je *kognitivna mapa*. Kognitivnu mapu moguće je „definirati kao vizualnu reprezentaciju neke teme. Pomoću kognitivnih mapa možemo bolje organizirati, izgraditi i razumjeti određenu temu“ (Juričić Devčić, 2012).

Procjenjivanje predznanja učenika moguće je ostvariti *sumativnim vrednovanjem* trenutnog znanja ili pogrešnih percepcija učenika. To se može ostvariti provedbom ispitnih materijala. Utvrđivanjem učeničkog predznanja mogu se donijeti informirane, strateške odluke o sadržaju koji treba poučavati.

b) Aktivnosti koje doprinose *izgrađivanju proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja*

Kvalitetno matematičko znanje temelji se u jednakoj mjeri na konceptualnom i proceduralnom znanju. Rittle-Johnson i sur. (2001) smatraju da je jedna vrsta znanja preduvjet za razvoj one druge. Razvoj je konceptualnog i proceduralnog znanja iterativan proces te se proceduralno i konceptualno znanje razvijaju uzastopno i nadopunjuju se. Viša razina usvojenosti jednog vodi do više razine usvojenosti drugog (slika 39).



Slika 39. Iterativni model razvoja konceptualnog i proceduralnog znanja (Rittle-Johnson i sur., 2001, str. 347)

Kako bi došlo do razvoja konceptualnog znanja potrebno je omogućiti učenicima *rješavanje zahtjevnijih problemskih zadataka* (Hierbert i Grouws, 2007). Van de Walle i sur. (2020, str. 60) navode sljedeće aktivnosti koje doprinose izgrađivanju proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja:

- poticanje učenika na osmišljavanje, korištenje i objašnjavanje vlastitih razmišljanja i strategija za rješavanje zadataka
- stvaranje eksplicitnih veza između strategija koje su osmislili učenici i konvencionalnih strategija i postupaka rješavanja matematičkih zadataka.

Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja moguće je ostvariti *vođenim otkrivanjem*. Pavleković (2009, str. 67) smatra

...učenje otkrivanjem, odnosno učenje istraživanjem sinonimima za nastavnu strategiju kojom se nakon zadavanja zadatka, problema, izricanja traženog pojma veze ili zakonitosti s učnikom ponove predznanja i postupci koji su neophodni za rješavanje ili otkrivanje nepoznatoga, pripremi materijal i pomoćna literatura, a zatim se prepusti učenicima da pokušajima i pogreškama, međusobnim raspravama testiraju svoje ideje sve dok samostalno (bez intervencija učitelja) ne otkriju tražena rješenja i/ili veze.

Učenik uči otkrivanjem ako samostalno riješi zadatak zadan riječima i otkrije sve mogućnosti rješenja prema općenitim parametrima. Rješavanjem problemskih zadataka uz učiteljevo vođenje u kojem učenici sami dolaze do rješenja zadataka razvija se samostalnost i ponavljaju se postupci kojima se može doći do rješenja.

Izvrstan način provjere konceptualnog razumijevanja u matematičkim zadacima moguće je ostvariti *odabirom nekoliko točnih ili netočnih tvrdnji*. Učenici nakon toga trebaju potvrditi točnost ili netočnost tvrdnje te obrazložiti odgovor. Pri tome im učitelj može pomoći postavljanjem pitanja. Trupčević i Glasnović Gracin (2014) ističu potrebu postavljanja pitanja

„Što bi bilo kad bi...?“ čime se od učenika očekuje da provedu mali mentalni eksperiment upravo s ciljem razvijanja i osvještavanja njihova konceptualnog znanja.

Uporaba tablica ili grafikona, odnosno analiza podataka učenicima omogućava razvoj proceduralnog znanja. Podatci ili problemi koji su vizualno prikazani pružaju mogućnost uočavanja veze ili pronalaženja uzorka. Tablica pruža izvrstan način praćenja podataka i procjenjivanja pretpostavki. Rješavanjem problemskih zadataka na temelju podataka iz dijagrama prikazanog na ploči izgrađuje se proceduralno znanje iz konceptualnog razumijevanja (Posamentier i Krulik, 2009).

c) *Aktivnosti koje promiču zaključivanje i rješavanje problema*

Van de Walle i sur. (2020, str. 60) sugeriraju da bi aktivnosti za poticanje učenika na zaključivanje i rješavanje problema trebale uključivati zadatke koji:

- daju maksimalan potencijal za izgradnju i povećanje trenutnog matematičkog razumijevanja učenika
- sadrže više ulaznih točaka
- zahtijevaju visoku razinu kognitivnog razumijevanja.

Osim toga, potrebno je pomoći učenicima da razumiju i samostalno rješavaju zadatke korištenjem višestrukih strategija i prezentacija sadržaja. Rješavanje problemskih zadataka zahtijeva koncentraciju i mentalno naprezanje. Osim toga, moguće je potaknuti učenike na suradničko rješavanje problema. Tome mogu doprinijeti i sljedeće aktivnosti:

Čarobna vreća zadataka podrazumijeva stvaranje matematičkih priča te korištenje konkretnog materijala. Zadatak je učenika osmisliti problemski zadatak riječima koristeći se računskim radnjama zbrajanja i oduzimanja i služeći se konkretnim materijalima, odnosno Multilink kockama. Ispred svakog para nalazi se vrećica s predmetima, a unutar svake vrećice nalaze se različiti konkretni. Učenike se raspoređuje u parove, a oni iz vrećice trebaju uzeti najmanje dva konkretna i u paru osmisliti zadatke zbrajanja i oduzimanja. Kada prvi učenik u paru riješi zadatak, drugi učenik treba utvrditi točnost zadatka i dodijeliti paru naljepnicu (vršnjačko vrednovanje). Nakon nekoliko riješenih zadataka parovi trebaju zamijeniti vrećice i iznova rješavati zadatke.

Singapurski model i upotreba konkretnih materijala izvrsna je metoda za poticanje rješavanja problemskih zadataka. Osim toga, tom metodom promiče se konceptualno učenje. Konkretno-slikovno-apstraktni pristup osigurava dublje razumijevanje matematičkih pojmova. Pomaže učenicima u učenju novih ideja nadogradnjom postojećeg znanja uvođenjem

apstraktnih koncepata na vidljiv i opipljiviji način. Konkretno-slikovno-apstraktni pristup oživljava koncepte dopuštajući učenicima samostalno iskustvo i rukovanje fizičkim predmetima. Učenici prvo rukuju stvarnim predmetima, a nakon toga prelaze na rukovanje modelima koji se koriste za predstavljanje predmeta (Lindorff i sur., 2019).

Obrnuto učenje podrazumijeva rješavanje problemskih zadataka prije nastave (Bergman i Sams, 2015). Učitelji trebaju omogućiti učenicima interaktivne aktivnosti učenja prije nastave matematike. Pored toga, učenici mogu izradom vlastitih sadržaja pridonijeti stvaranju zbirki interaktivnih materijala.

Pogađanje i provjeravanje ili *metoda pokušaja i pogrešaka* je strategija kojom učenik pretpostavlja što bi moglo biti rješenje zadatka, a zatim nastavlja s provjeravanjem tog nagađanja rješavajući problem. Učenik istražuje različita moguća rješenja te pokušava otkriti što u rješenju funkcionira, a što ne. Čak i ako nagađanje nije točno, može dati naznaku drugim mogućnostima ili pomoći drugima u rješavanju problema (Posamentier i Krulik, 2009).

Rješavanje jednostavnijeg problema ili *podjela problema na dijelove* je strategija koja omogućuje rješavanje problema na više od jednog načina. Ako je problem prevelik ili suviše složen, ovom strategijom učenici mogu podijeliti problem na više dijelova kako bi dobili uvid u rješavanje izvornog problema. Nakon rješavanja jednostavnije verzije problema, učenici mogu prijeći na izvorni (možda složeniji) problem (Posamentier i Krulik, 2009).

Glumom, oponašanjem i simulacijom učenici mogu preuzeti ulogu iz problemskog zadatka i sastaviti plan rješavanja. Osim toga učenici mogu koristiti različite predmete kako bi simulirali aktivnost koja se spominje u zadatku (Posamentier i Krulik, 2009).

Izrada crteža je strategija kojom se nastoji razjasniti matematički problem. To bi trebalo pomoći učenicima u rješavanju problema i dovesti ih do određenog zaključka. Izradi crteža treba se posvetiti određena pozornost jer nepravilan crtež može odvesti do pogrešnog zaključka ili krivog puta rješavanja (Posamentier i Krulik, 2009).

d) Aktivnosti koje omogućuju *suradničko učenje*

Suradničko učenje zahtijeva socijalne vještine koje su učenicima važne za uspješno funkcioniranje unutar grupe. Neke od aktivnosti koje tome doprinose opisujem u nastavku.

Učenjem u parovima učenike se može potaknuti da uče rješavati problemske zadatke riječima koji zahtijevaju zaključivanje.

Igrom u nastavi može se postići učenička suradnja. Osim toga, igra je u funkciji povećanja učeničkog interesa za učenje matematike. Jedna je od takvih igara: „Zavrta kolo i riješi zadatak“. Zadatak je učenika zavrtnuti kolo koje pokazuje broj zadatka koji treba riješiti, nakon toga se provjerava točnost zadatka i dodjeljuje se zastavica učeniku koji točno riješi zadatak (vršnjačko vrednovanje). Pobjeđuje učenik s najviše skupljenih zastavica.

Učenjem u grupama učenike se potiče na usmeno izražavanje razumijevanja pojmova (Styers i Baird-Wilkerson, 2011). Osim toga učenici razvijaju intelektualne sposobnosti, oblikuju svoje stavove te do izražaja može doći njihova kreativnost.

Igrom „Matematički dvoboj“ razred se može podijeliti u dvije vrste koje stoje jedna nasuprot drugoj (npr. djevojčice i dječaci ako ih je podjednak broj, ali mogu sudjelovati i miješane skupine). Predstavnik vrste naizmjenično postavlja zadatke riječima. Tko u dvoboju prvi izračuna zadatak i glasno kaže točno rješenje, uzima igrača iz suprotne vrste u svoju vrstu. Ako izgovori netočno rješenje, prelazi u drugu vrstu. Igra je završila kada jedna vrsta preotme sve igrače drugoj vrsti (ako je manji broj učenika u razredu) ili pobjeđuje ekipa koja na kraju igre ima veći broj učenika.

Igra „Tko će prije do 1000“.

Svaki igrač dobije 3 skupine po 20 kockica (svaka skupina od 20 kockica različite je boje, pri čemu jedna boja predstavlja jedinice, druga desetice, a treća stotice), podlogu s mjesnim vrijednostima i prazan list papira za pismenu provjeru. Svaka skupina djece dobiva i papirnatu vrećicu s karticama brojeva od 1 do 100. (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998, str. 41)

Vrećicu s karticama stavlja se na sredinu stola među igrače. Učenici redom izvlače kartice, čitaju brojeve i stavljaju odgovarajući broj kockica na svoju podlogu s mjesnim vrijednostima. Izvučene kartice učenici trebaju vratiti u vrećicu nakon čega sljedeći igrač izvlači svoju kartu. Učenici pribrajaju izvučene brojeve postojećima. To rade slažući kockice na podlogu s mjesnim vrijednostima. „Kako se igra razvija učenici mijenjaju deset jedinica za jednu deseticu, deset desetica za jednu stoticu. Pobjednik je igrač koji prvi postigne 1000 ili više. U svrhu provjere učenici mogu na praznom papiru pisanim putem izračunati rezultat.“ (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998, str. 41).

Igra „Matematički nogomet“ zahtijeva obilježavanje nogometnog polja. Svaka grupa dobiva svoj magnet te odabiru ime, gol, kapetana. Zadatak je što prije doći do protivničkoga gola u četiri koraka. Učenici unutar grupe dogovaraju redosljed igranja. Ako učenik iz jedne grupe točno riješi zadatak, pomiče magnet jedan korak i zatim igra protivnička grupa. Ako ga ne riješe točno, ostaju na istome mjestu i drugi tim je na redu. Kad se prijeđe četiri koraka i dođe do

protivničkoga gola, smatra se da je postignut zgoditak pa igra kreće ispočetka. Pobjeđuje tim koji postigne više golova.

e) Aktivnosti koje omogućuju *upotrebu tehnologije*

Primjena tehnologije u nastavi matematike ima smisla kada doprinosi kvaliteti učenja, potiče učenike na aktivnost, služi kao sredstvo komunikacije, pomaže učenicima u bržem i kvalitetnijem pamćenju nastavnih sadržaja, potiče otkrivanje novih informacija te služi kao sredstvo za računanje ili prezentaciju učeničkih rezultata. Tome mogu doprinijeti neke od sljedećih mogućnosti:

Samostalno rješavanje interaktivnih vježbi pomoću *digitalnih alata* kao što su Wordwall, Learning Apps, Kahoot i sl. Na primjer, aplikacija Kahoot omogućuje stvaranje kvizova koji mogu potaknuti učeničku aktivnost, ali isto tako dati učiteljima i učenicima povratnu informaciju o usvojenosti određenih sadržaja.

Rješavanje zadataka pomoću *Plickers* alata koji je namijenjen jednostavnoj i inovativnoj provjeri znanja u razredu, a omogućuje brzu povratnu informaciju. Rezultati i analiza rezultata učenika odmah su dostupni. Za rješavanje zadataka potreban je samo jedan mobilni uređaj s kamerom ili tablet. Osim za provjeru znanja, Plickers se može rabiti za evaluaciju nastave što je važno činiti u akcijskom istraživanju.

Igra „Tko želi biti milijunaš“ (<https://learningapps.org/watch?v=pj9yuq8qc21>) namijenjena je natjecanju grupa učenika u znanju. Grupa koja točno odgovori na pitanja pobjeđuje.

f) Aktivnosti u kojima se daju *povratne informacije*

Učeničko rješavanje matematičkih zadataka neće biti učinkovito ako nije popraćeno povratnim informacijama (Kilpatrick i sur., 2001). To uključuje i formativno vrednovanje. Formativnim vrednovanjem kontinuirano se prati učeničko napredovanje u svladavanju matematičkih ciljeva. Povratnom informacijom i formativnim vrednovanjem učenici se usmjeravaju prema željenim ciljevima. Učinkovita povratna informacija prema Scherer (2016) uključuje sedam značajki kvalitete: opipljivost i transparentnost, djelotvornost, prijateljsku prilagođenost, pravovremenost, tijek povratne informacije, dosljednost te napredak prema cilju. Davanje povratnih informacija može se postići na neke od navedenih načina:

Jedna od aplikacija koja se može koristiti za pravovremeno davanje povratnih informacija je *Plickers*.

Online kvizovi (Kahoot) omogućuju provjeru znanja. To ne znači da su uvijek korisni za napredak u učenju. Kviz ili test treba biti informativan za učenika, odnosno omogućiti efikasnije davanje povratnih informacija ne samo o točnosti rješenja određenog zadatka, već i o procesu rješavanja te o metakognitivnim strategijama koje učenici koriste (Hattie, 2017). Aplikacije kao što su Kahoot mogu učenicima dati povratnu informaciju o točnosti odgovora, ali ostale razine povratne informacije treba dati učitelj prateći učeničku aktivnost na nastavi.

Portfoliji (mape) mogu poslužiti za formativno praćenje. Učenici trebaju spremati različite dokumente (domaće zadaće, slike, zadatke za vrednovanje) kako bi pratili svoju aktivnost, napredak i postignuća na nastavi matematike.

Rješavanje zadataka *uporabom samoljepljivih listića u boji*. Učenici samostalno rješavaju zadatke. Nakon toga provjeravaju svoja rješenja i u bilježnicu nakon svakog riješenog zadatka lijepe zelenu, žutu ili crvenu naljepnicu koje označavaju: točno, djelomično točno ili netočno riješeni zadatak. Time provode samovrednovanje. Samostalnom provjerom i vrednovanjem zadataka učenike se može potaknuti da kritički pristupaju vrednovanju vlastita napredovanja te da postanu svjesni svojih pogrešaka.

Pregled ostvarenih aktivnosti prema značajkama učinkovite nastave matematike prikazan je u tablici 7. Iz tablice je moguće uočiti da su tijekom realizacije akcijskog istraživanja sve značajke došle do izražaja u nastavi matematike, premda nisu bile zastupljene na svim satima.

Tablica 7. Zastupljenost značajki učinkovite nastave matematike u videozapisima snimljenim za vrijeme akcijskog istraživanja

Značajke nastave matematike	Aktivnosti
Uvažavanje učeničkog predznanja	<ul style="list-style-type: none"> - igra „Matematika u pokretu“ - refleksija 3-2-1 obrazac - osmosmjerka – ponavljanje i pronalaženje matematičkih pojmova - kartice ponavljanja brojeva do 20 i računskih radnji zbrajanja i oduzimanja - ponavljanje matematičkih sadržaja Plickers aplikacijom - oluja ideja - uporaba konkretnih materijala u vježbanju zbrajanja i oduzimanja - rješavanje problemskih zadataka - utvrđivanje predznanja učenika analizom brojeva - „Što bismo mogli reći o broju 18?“

Značajke nastave matematike	Aktivnosti
Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja	<ul style="list-style-type: none"> - rješavanje problemskih zadataka korištenjem tablice ili grafikona - rješavanje zadataka prikazivanjem količine pomoću piktograma - stvaranje problemske situacije u paru (procjenjivanje potrebne količine hrane i zapisivanje cijena ispod naziva namirnica te zbrajanje cijena) - rješavanje problemskih zadataka prema podacima iz dijagrama i tablice - utvrđivanje točnosti ili netočnosti zadanih tvrdnji uz obrazloženje odgovora
Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema	<ul style="list-style-type: none"> - rješavanje problemskih zadataka singapurskim modelom - učeničko samostalno osmišljavanje (problemskih) zadatka riječima uporabom Čarobne vrećice, kotača u Wordwall aplikaciji, Matematičke slagalice (osmišljavanje zadataka pomoću proizvoljnog broja zagrada uz pomoć dviju računskih operacija i tri zadana broja, slaganje izraza čija je vrijednost jednaka zadanom rezultatu), korištenjem brojeva triju bačenih igraćih kockica - izrada crteža tijekom rješavanja problemskih zadataka - zadatci modela skupa - rješavanje problemskih zadataka pomoću podatka iz dijagrama - učenje otkrivanjem - rješavanje zadataka s nepoznicama u kojima je potrebno pronaći brojeve koji nedostaju
Korištenje tehnologije	<ul style="list-style-type: none"> - slaganje slagalice https://www.jigsawplanet.com/?rc=play&pid=0434adde1116 - Plickers aplikacija - Čarobni kotač u Wordwall aplikaciji - igra Memory – u Learning Apps aplikaciji - kvizovi pomoću Kahoot aplikacije i Google forms obrasca - igra „Tko želi biti milijunaš“ u Learning Apps aplikaciji
Suradničko učenje	<ul style="list-style-type: none"> - rješavanje zadataka zbrajanja i oduzimanja matematičkom slagalicom - natjecateljska igrice „Matematički dvoboj“ - igra „Tko će prije do 1000“ - igra s kartama i kockicama za treniranje brzog računanja i kombiniranja - igra „Memory“ – povezivanje parova zadanih matematičkih zadataka u Learning Apps aplikaciji - igra „Tko želi biti milijunaš“ u Learning Apps aplikaciji - igra „Ptice u jatu“ - igra pantomima - slaganje slagalice - rješavanje zadataka „pronalaženje sličnosti i razlike“ - zadatci sa šibicama - matematička kupovina (osmišljavanje računa potrošenog novca u trgovini) - igra „matematički nogomet“

Značajke nastave matematike	Aktivnosti
	<ul style="list-style-type: none"> - matematička igra s igraćim kockicama (bacanje četiri kockice i zapisivanje dobivenih vrijednosti). - igra sa žetonima (bacanje igraće kockice i oduzimanje brojeva na njima (veći – manji) - igra „Neka bude 15“ – naizmjenično prekrivanje dva ili tri broja čiji je zbroj 15 - igra „Matematička nekretnina“
Povratne informacije	<ul style="list-style-type: none"> - ponavljanje usvojenih pojmova Plickers aplikacijom - semafor kartice (povratna informacija o trenutnom razumijevanju nastavnih sadržaja) - kviz Kahoot - nastavni listić za povratne informacije (obrazac za davanje povratnih informacija) - kviz u Google forms obrascu - aktivnost „Dvije zvijezde i želja“ - rješavanje zadataka korištenjem samoljepljivih listića u tri boje (crvena, žuta, zelena) - samostalna provjera i vrednovanje zadataka davanjem povratnih informacija

5.1.5. Prikupljanje i analiza podataka

Podatci su prikupljeni za vrijeme provedbe aktivnosti u nastavi matematike u prvom polugodištu 2021./2022. školske godine. O prikupljenim podacima, a osobito videozapisima nastave raspravljala sam s kritičkim prijateljima koji su mi pomogli u provedbi refleksivne analize. Bognar (2006) ističe da je kritički prijatelj i osoba koja više brine za napredovanje učitelja nego za napredovanje istraživanja te pomaže učiteljima razviti svoje refleksivne kapacitete i učenje. Mat Noor i Shafee (2021) ističu da je kritički prijatelj osoba koja je zagovornik uspješnosti prakse, odvaja vrijeme da u potpunosti razumije nastavni kontekst i ishode prema kojima osoba ili grupa djeluje. Refleksivnom analizom nastojala sam utvrditi ostvarene promjene i dobiti uvid u to što još treba mijenjati u planiranim aktivnostima.

Za vrijeme istraživanja, prikupljala sam različite podatke o kvaliteti nastavnog procesa i rezultatima učenja učenika. To uključuje učeničke povratne informacije dobivene na temelju evaluacijskih upitnika i intervjuja. Obrazovni rezultati praćeni su uobičajenim provjerama znanja koji se koriste u nastavi (Jakovljević Rogić i sur., 2021). Osim toga, korišteni su sljedeći postupci prikupljanja podataka:

Istraživački dnevnik omogućuje praćenje vremenskog slijeda događaja i dokumentiranje što se dogodilo u nastavi. Koristi se za refleksiju, promišljanje istraživača o istraživanoj praksi,

služi za prikaz napredovanja tijekom istraživanja (McNiff, 2010). Tijekom istraživanja vodila sam istraživački dnevnik u kojem sam detaljno opisivala provedene aktivnosti na nastavi matematike. U istraživački dnevnik zabilježila sam svoja razmišljanja, osjećaje koji su se javili tijekom istraživanja, probleme koje sam uočila i pogreške koje sam učinila. Prema Bognaru (2006) posebno važan izvor podataka u akcijskom istraživanju predstavlja istraživački dnevnik. On može poslužiti za ostvarivanje sljedećih ciljeva:

- „praćenje vremenskog slijeda događaja pri čemu je važno navesti uz svaku bilješku datum, vrijeme i kontekst opisanog događaja
- ilustracija (detaljan opis) bitnih događaja kako bi omogućili čitatelju uživanje u situaciju istraživanja
- izvor podataka potrebnih za analizu
- prikaz napredovanja u akcijskom istraživanju uključujući uspješne i neuspješne aktivnosti te osobno učenje koje proizlazi iz refleksije“ (str. 184).

Mužić (1999) smatra da je *sustavno promatranje* najizravniji način prikupljanja podataka kada se istražuje odgojno-obrazovna praksa. Sustavno promatranje može se ostvariti s pomoću tehničkih pomagala i bez njih. U ovom istraživanju koristila sam kameru kako bih snimila nastavne aktivnosti. Naknadno sam provodila refleksivnu analizu snimki nastave (tablica 8) koja je bila uključena u istraživački dnevnik. Osim toga fotografiranjem sam pratila aktivnosti na nastavi. Promjene u nastavi pratila sam koristeći protokol COPUS (Smith i sur., 2013). COPUS protokol sadrži 25 kategorija za praćenje aktivnosti učitelja i učenika na nastavi. Protokol je jednostavan za korištenje i karakterističan je po tomu što se ne vrednuje ono što učitelji i učenici čine za vrijeme nastave već se samo bilježi zastupljenost predviđenih aktivnosti. Dakle, protokol pruža uvid u vrstu i trajanje uobičajenih razrednih aktivnosti učenika i učitelja koje su zabilježene na videozapisima nastave.

Istražila sam značajke trenutne nastave matematike provedbom *sudjelujućeg promatranja* uz komentare kritičkih prijatelja. Prema Mužiću (1999, str. 86) za specifične situacije akcijskoga istraživanja pogodno je sudjelujuće promatranje. „U njemu promatrač svjesno i sustavno sudjeluje u samoj aktivnosti, interesima i emocijama grupe koju promatra.“ Tim istraživačkim postupkom postiže se realnost promatrane situacije, ali se može javiti problem objektivnosti promatrača. Tijekom takvog promatranja teško je simultano voditi bilješke, nego se promatranje ostvaruje uporabom videozapisa ili je potrebno izvrsno pamćenje promatrača.

Tablica 8. Poveznice na videozapise nastavnih aktivnosti snimljenih u drugom i trećem razredu

Vrijeme snimanja	Drugi razred	Treći razred	Vrsta aktivnosti
10.9.2021.	https://youtu.be/t7V6Drfxde4		nastava
1.10.2021.	https://youtu.be/wqIRoPLUeS0	https://youtu.be/ig9FM51Dqrc	nastava
11.10.2021.	https://youtu.be/QnSa3ABVnm8	https://youtu.be/QPQlbtKznTw	nastava
15.10.2021.	https://youtu.be/OEUo62lexwE	https://youtu.be/h3j-KnlgFYw	nastava
22.10.2021.	https://youtu.be/EQxgsCvG6hg		nastava
24.10.2021.	https://youtu.be/IVY7cxvzA4U		
25.10.2022.		https://youtu.be/R2NvwDz9IQg	nastava
29.10.2021.	https://youtu.be/OK3XWWW53xg		nastava
10.11.2021	https://youtu.be/LC2Pz2OZa8		nastava
11.11.2021.	https://youtu.be/LLHiEh5fDpw	https://youtu.be/AfP8JfIFcNE	nastava
	https://youtu.be/11AQQ-C1_so		uporaba manipulativa
	https://youtu.be/pWXsHflmj4		uporaba manipulativa
	https://youtu.be/11AQQ-C1_so		uporaba manipulativa
			https://youtu.be/PRBea842ljk
17.11.2021.	https://youtu.be/M6hm5-IJCgw		nastava
25.11.2021.	https://youtu.be/aelxCJ4GBbo		nastava
26.11.2021.	https://youtu.be/kLZeCLrLdyo	https://youtu.be/JOqystMJyE4	nastava
		https://youtu.be/M3FgW_j8oTs	uporaba manipulativa
2.12.2021.	https://youtu.be/FLKYQbDeAdU		nastava
		https://youtu.be/8zl_r2Z6dx4	matematička igra
3.12.2021.		https://youtu.be/xdToK_yVhFE	nastava
9.12.2021.	https://youtu.be/PfplaUSqtNY	https://youtu.be/fNyAp0o5yws	usmena provjera znanja
		https://youtu.be/L5GC5vXGaeW	matematička igra
10.12.2021.	https://youtu.be/y9qQk_sHc9c	https://youtu.be/IMW0OLFI_F4	nastava
21.12.2021.		https://youtu.be/qe-oINESSuM	nastava
22.12.2021.		https://youtu.be/-V8DpHFhFSo	nastava

Cohen i sur. (2007) *intervju* definiraju kao razgovor u kojemu istraživač nastoji saznati od ispitanika sadržaje povezane s ciljevima istraživanja, odnosno prikupiti informacije relevantne za istraživanje. Intervju sudionicima akcijskog istraživanja pomaže izraziti svoje razumijevanje pojedinih situacija koje se događaju u praksi. Kitwood (1977) razlikuje tri shvaćanja intervjua. Prema prvom shvaćanju intervjua je potencijalno sredstvo za prijenos i prikupljanje podataka. Prema drugom shvaćanju intervjua je transakcija koja je neizbježno pristrana te to treba

prepoznati i kontrolirati. U trećem shvaćanju intervju se smatra susretom koji nužno ima mnoge značajke svakodnevnog života. Patton (1980) razlikuje četiri vrste intervjuja:

- a. intervju kao slobodan razgovor
- b. tematski intervju
- c. standardizirani intervju s otvorenim pitanjima i
- d. zatvoreni kvantitativni intervju.

Za vrijeme istraživanja provela sam s učenicima i snimila tri puta *grupni* i jedan *individualni standardizirani intervju s pitanjima otvorenog tipa*. Svi intervjui provedeni su nakon održane nastave matematike i to s učenicama trećeg razreda 18. listopada 2021. godine, s učenicima drugog razreda 10. prosinca 2021. godine, s učenicima drugog i trećeg razreda 29. studenog 2021. godine i s učenicom trećeg razreda 23. prosinca 2021. godine. Odgovori učenika dali su mi uvid u to kako učenici doživljavaju promjene koje su se dogodile na nastavi te u njihovo zadovoljstvo nastavom. Osim toga, saznala sam kako su učenici procijenili svoju aktivnost i samostalnost na nastavi.

Anketiranje „je postupak u kojem anketirani pismeno odgovara na pitanja koja se odnose na činjenice koje su im poznate ili na pitanja u vezi s njihovim osobnim mišljenjem” (Mužić, 1999, str. 82). Anketiranjem se prikupljaju podatci u određenoj vremenskoj točki s namjerom opisivanja prirode postojećih okolnosti ili određivanja veza koje postoje između specifičnih odnosa. Također ankete pružaju podatke koji se mogu statistički obrađivati. Pitanja u anketi mogu biti otvorenog i zatvorenog tipa. Anketu sam provela na početku istraživanja s roditeljima, ali i s učenicima kako bih saznala nešto više o učeničkim stavovima prema matematici. Upitnik se sastojao od pitanja zatvorenog i otvorenog tipa. Osim toga, anketu sam provela i na kraju istraživanja kako bih saznala jesu li promjene kod učenika ostvarene. Osim pitanja otvorenog i zatvorenog tipa, učenici su trebali procijeniti na skali od 1 do 5 koliko im se sviđa učenje u skupinama, uče li sada matematiku kod kuće više nego prošle školske godine te koliko su aktivni na satu matematike. U pitanjima otvorenog tipa cilj mi je bio otkriti što im se sviđa, a što ne sviđa na nastavi matematike. Osim toga zanimalo me i što predlažu da se promijeni kako bi nastava matematike bila bolja.

Sa svrhom *procjenjivanja i prosuđivanja* (koristila sam listiće za evaluaciju nastave) koji su bili potpuno anonimni. Evaluacijski listić koristila sam tijekom cijelog istraživanja i učenici su ga na kraju svakog provedenog sata ispunjavali. Evaluacijski upitnik sastojao se od pet lica osjećaja, a učenici su zaokruživali ona koja su predstavljala njihove osjećaje nakon svakog

održanog sata matematike. Osim toga, evaluacijski listić sastojao se i od pitanja u kojima su učenici procjenjivali na skali od 1 do 5 vole li rješavati individualno zadatke, koliko često rješavaju problemske zadatke. Nadalje, procjenjivali su također je li im se nastava matematike sviđala ili nije. Posljednje pitanje na evaluacijskom listiću bilo je otvorenog tipa. U njemu su učenici trebali dati svoje prijedloge za unapređenje nastave matematike.

O prikupljenim podacima, a osobito videozapisima nastave raspravljala sam s kritičkim prijateljima. Kontinuiranom analizom podataka i reflektivnim propitivanjem nedostataka i ključnih problema korigirala sam plan akcijskog istraživanja kako bih omogućila unapređenje kvalitete nastave matematike te kako bih učenicima omogućila uvjete za postizanje boljih obrazovnih rezultata iz matematike.

Tijekom istraživanja provedene su tri provjere znanja (u trećem razredu) i dvije provjere znanja (u drugom razredu). Učenica J. S. koja pohađa nastavu po prilagođenom programu vrednovana je provjerama znanja za učenike s teškoćama u učenju.

Prije početka istraživanja roditelje sam informirala pisanim putem o sudjelovanju njihove djece u akcijskom istraživanju. Suglasnost za roditelje sadržavala je informacije da će se u prvom polugodištu 2021./2022. školske godine provesti akcijsko istraživanje s ciljem unapređenja kvalitete nastave matematike i učenja učenika (Prilog 1). Svi roditelji učenika 2. i 3. razreda područne škole Budimci ovjerali su svojim potpisima pisanu suglasnost za sudjelovanje učenika u istraživanju. Za provedbu istraživanja zatražila sam i dobila suglasnost ravnateljice Osnovne škole Hinka Juhna Podgorač Zdenke Vukomanović. Suglasnost je zatražena i od Etičkog povjerenstva Filozofskog fakulteta Osijek koje je razmotrilo priloženu dokumentaciju i na sjednici održanoj elektroničkim putem od 26. do 28. travnja 2021. godine zaključilo da je predloženo istraživanje u skladu s odredbama Etičkog kodeksa Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te da se može provesti kako je planirano.

McNiff (2016) ističe kako se izvještaj akcijskog istraživanja piše u narativnom obliku te u prvom licu jednine jer se opisuju i objašnjavaju promjene koje su ostvarene u vlastitoj praksi. Zbog toga je u nastavku tekst pisan u prvom licu jednine.

5.2. Utvrđivanje predznanja učenika drugog i trećeg razreda iz matematike

Na početku polugodišta provela sam inicijalnu provjeru znanja, odnosno sumativno vrednovanje. Time sam ostvarila procjenu predznanja učenika na početku školske godine. Rezultati inicijalne provjere znanja učenika drugog i trećeg razreda ukazali su na trenutnu

razinu usvojenih znanja iz matematike kao i na potencijalne nedostatke kod pojedinih učenika. Od šest učenika, kod njih četvero uočila sam nedostatke u matematičkom znanju. U narednoj analizi pokušala sam pokazati što sam uočila kod pojedinih učenika.

L. S. je učenik drugog razreda. Znatiželjan je, miran, tih i povučen dječak. Jedan je od dvojice dječaka drugog razreda. Kada se osjeća sigurno lijepo surađuje s ostalim učenicima. Voli učiti matematiku. Zadatke rješava s lakoćom i u svoje znanje ulaže dosta truda. Najradije rješava zadatke samostalno, iako ponekad ističe kako voli rad u paru. Sumativnim vrednovanjem uočila sam ostvarenost sljedećih ishoda propisanih Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika (MZO, 2019): zna brojiti, čitati i zapisivati brojke i brojevne riječi te uspoređivati prirodne brojeve do 20. Prikazuje brojeve na različite načine. „Uočava odnose među dekadskim jedinicama“ (jedinice, desetice, stotice), „objašnjava odnos broja i vrijednosti pojedine znamenke“, razlikuje glavne i redne brojeve do 20, „vješto uspoređuje i primjenjuje različite načine prikaza i zapisa dvoznamenkastoga broja, sigurno se koristi dvoznamenkastim brojevima u matematici i u svakodnevnim situacijama.“ Osim toga, „obrazlaže odabir matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost dobivenoga rezultata u rješavanju problemskih situacija“. Problem mu predstavljaju nepažnja i nedostatak koncentracije na nastavi što ga ponekad usporava pri rješavanju zadataka.

M. J. je učenica drugog razreda. Voli likovnu kulturu, a često se raduje i matematici. Na prvi pogled djeluje kao tiha i povučena, no kada netko stekne njezino povjerenje, postaje vesela, razigrana i znatiželjna djevojčica. Inicijalnom provjerom utvrdila sam da reda po veličini zadane brojeve, „određuje broj neposredno ispred i neposredno iza zadanoga broja, prikazuje brojeve na brojevnoj crti, razlikuje jednoznamenkaste i dvoznamenkaste brojeve“ (MZO, 2019, str. 16). „Koristi pojmove ispred i iza u redosljedu te objašnjava razliku između glavnih i rednih brojeva“ (MZO, 2019, str. 377). Često „zbraja i oduzima uz poneku pogrešku, rabi zamjenu mjesta i združivanje pribrojnika te vezu zbrajanja i oduzimanja zapisujući četiri jednakosti“ (MZO, 2019, str. 378). Matematičkim jezikom ponekad „prikazuje i rješava jednostavne brojevne izraze na temelju kojih donosi zaključke u različitim okolnostima“ (MZO, 2019, str. 379). „Prikuplja i razvrstava konkretne te ih prikazuje skupovima i crtežima“ (MZO, 2019, str. 384). „Uspoređuje dva konkretna objekta te ih opisuje prema mjerivome svojstvu“ (MZO, 2019, str. 383). Osim toga, „razlikuje i imenuje zakrivljene i ravne crte“ (MZO, 2019, str. 382). „Zbraja i oduzima brojeve do 20 služeći se konkretima i pravilno zapisuje brojevne izraze“ (MZO, 2019, str. 383). „Uočava pravilne izmjene i navodi primjere objekata, pojava, aktivnosti i brojeva u okruženju“ (MZO, 2019, str. 380). Uočila sam da joj je koncentracija kratkotrajna i

lako ju je omesti. U svojoj brzopletosti lako pogriješi pri rješavanju matematičkih zadataka. Nije samostalna pri rješavanju zadataka iz matematike. Boji se neuspjeha zbog čega se ponekad povlači i ne sudjeluje u nastavnim aktivnostima.

D. S. je razigran, znatiželjan učenik drugog razreda koji voli pričati. Voli računala i crtane filmove. Inicijalnim vrednovanjem utvrdila sam da zbraja i oduzima brojeve do 20 služeći se konkretima često nepravilno zapisujući brojevni izraz. Konkretima i pravilnim matematičkim zapisom „prikazuje i rješava jednostavne brojevne izraze“ (MZO, 2019, str. 19), međutim problem mu predstavljaju konkretniji zadatci kao i zadatci zadani riječima. „Izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove predstavljene objektima iz neposredne okoline i didaktičkim modelima“ (MZO, 2019, str. 20). Koncentracija mu je kratkotrajna i često ometa nastavu. U razredu se borio za moju pozornost različitim, ponekad neumjesnim upadicama čime ometa zajedničke aktivnosti učenika. U svojoj brzopletosti lako griješi tijekom rješavanja zadataka.

E. F. je učenica trećeg razreda koja je vrlo vedre naravi. Iznimno zainteresirana za nastavne sadržaje iz matematike. Zainteresirana je za različite aktivnosti. Voli plesati, pjevati, a osobito glumiti. Rado uči i ne boji izazova na koje nailazi u školi. Vrlo je aktivna i stalno traži pažnju učiteljice. Teško joj pada bilo kakva kritika. Vrlo je samostalna, te je ovladala svim dosadašnjim nastavnim sadržajima iz matematike s odličnim uspjehom. Rado se uključuje u bilo koju matematičku aktivnost i odmah joj pristupa. Traži pomoć ako joj je potrebna. Kod učenice E. F. tijekom inicijalne procjene nastavnih sadržaja iz matematike uočila sam da „vješto uspoređuje i primjenjuje različite načine prikaza i zapisa dvoznamenkastoga broja, sigurno se koristi dvoznamenkastim brojevima u matematici i u svakodnevnim situacijama“ (MZO, 2019, str. 385). Osim toga, „broji, čita i zapisuje brojkama i brojevnim riječima te uspoređuje prirodne brojeve do 100, prikazuje brojeve na različite načine, uočava odnose među dekadskim jedinicama (jedinice, desetice, stotice)“ (MZO, 2019, str. 385).

Ž. B. je učenica trećeg razreda koja voli surađivati u paru, ali tijekom prezentiranja uratka često je pritajena. Tiha je i povučena djevojčica koju je tijekom učenja potrebno usmjeravati. Kod učenice Ž. B. tijekom sumativnog vrednovanja nastavnih sadržaja iz matematike uočila sam da „prikazuje dvoznamenkaste brojeve u tablici mjesnih vrijednosti ili na brojevnoj crti te prikazuje odnose dekadskih jedinica, uspoređuje i upotrebljava brojeve u opisivanju količine“ (MZO, 2019, str. 385) uz pomoć učiteljice. Osim toga, „zbraja i oduzima u skupu brojeva do 100 detaljno zapisujući postupak te uz manju nesigurnost pri prijelazu desetice“ (MZO, 2019, str. 387). „Množi i dijeli u okviru tablice množenja s manjom nesigurnošću, primjenjuje svojstvo komutativnosti i vezu množenja i dijeljenja te izvodi četiri jednakosti“ (MZO, 2019,

str. 388). „Računa sa zagradama s više od dviju računskih operacija“ (MZO, 2019, str. 389). „Razmjenjuje matematičke ideje i objašnjenja te suradnički rješava različite tipove jednostavnih zadataka“ (MZO, 2019, str. 390). „Određuje vrijednost nepoznatoga člana u računskome izrazu uz manju nesigurnost“ (MZO, 2019, str. 392), a prikupljene podatke prikazuje jednostavnim tablicama i piktogramima.

J. S. učenica je trećeg razreda koja je u kontaktu s drugim učenicima zatvorena i plašljiva. Slabije je koncentracije i lako gubi pažnju te ju je tijekom nastave potrebno usmjeravati. Formirala je pojam broja. Računske radnje poznaje, sigurna je u zbrajanju brojeva do 10, ali teže primjenjuje oduzimanje. Služi se konkretnim materijalom u zbrajanju i oduzimanju. Razlikuje geometrijska tijela od likova. Razumije matematičke zakonitosti, ali ih teže primjenjuje na konkretnom primjeru. Pravi pogreške u zadacima sa zagradama ili s više računskih radnji. U radu traži pomoć učitelja i asistentice, ali je samostalnija. „Prepoznaje brojeve zapisane rimskim znamenkama te ih čita i zapisuje uz manje pogreške“ (MZO, 2019, str. 386). „Razmjenjuje matematičke ideje i objašnjenja te suradnički rješava različite tipove jednostavnih zadataka“ (MZO, 2019, str. 390). „Prepoznaje uzorak i nastavlja jednostavne nizove brojeva, objekata, aktivnosti i pojava“ (MZO, 2019, str. 391). Određuje vrijednost nepoznatoga člana koristeći se po potrebi konkretima“ (MZO, 2019, str. 392). „Prikuplja podatke o nekoj jednostavnoj pojavi i prikazuje ih neformalnim načinom“ (MZO, 2019, str. 398). „U jednostavnim i poznatim situacijama razlikuje je li neki događaj moguć ili nemoguć“ (MZO, 2019, str. 399). Inicijalnom procjenom utvrđeno je da su kod učenice prisutne teškoće u učenju matematike. Nije usvojila zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20, ali pokušava rješavati zadatke pomoću konkretnih i slikovnih prikaza. Zadatke riječima ne uspijeva riješiti ni uz pomoć.

Osim sumativnog vrednovanja ostvarila sam i formativno vrednovanje kojim sam pratila učenike u svrhu poboljšanja njihova uspjeha i poticanja na učenje. Formativnim vrednovanjem dobila sam povratne informacije o razini usvojenosti matematičkih sadržaja te razini do koje su određeni ishodi nastave ostvareni. Na temelju formativnog vrednovanja na kraju prvog obrazovnog razdoblja šk. god. 2021./2022. uočila sam sljedeće promjene kod učenika na nastavi matematike za vrijeme akcijskog istraživanja.

Učenik L. S. na nastavi matematike rado je sudjelovao u suradničkim aktivnostima. Pri učenju u paru došlo je do izražaja njegovo matematičko znanje. Na nastavi matematike procjenjivao je rezultate i primjenjivao matematičke radnje zbrajanja i oduzimanja. Rado je osmišljavao i kombinirao zadatke s riječima, procjenjivao i navodio postupke za rješavanje problemskih zadataka i mogućih rješenja te izračunavao zadatke i pisao odgovore riječima.

Osim toga, povezivao je istodobno više računskih radnji na složenijim zadacima i procjenjivao je rezultate. Rado je sudjelovao u natjecateljskim igrama i pomagao drugim učenicima.

Kod djevojčice M. J. ostvaren je napredak tijekom istraživanja. Postala je vesela, razigrana i znatiželjna djevojčica. Ostvarila je suradnju s prijateljima i samoinicijativno je pomagala drugima u razredu. Na postavljena pitanja tijekom nastave teško sam mogla dobiti konkretan odgovor od nje. Kako je vrijeme prolazilo, odgovaranje na nastavi kao i suradnja više joj nisu predstavljali problem. Postala je komunikativnija i otvorenija, a problemske zadatke zbrajanja i oduzimanja rješavala je s lakoćom. To je pokazala sudjelujući u suradničkim aktivnostima kao što je matematička kupovina u kojoj se istaknula za vrijeme nastave. Postala je manje brzopleta pri rješavanju matematičkih zadataka. Tijekom sudjelovanja u istraživanju postala je samostalnija u rješavanju problemskih zadataka iz matematike.

D. S. se u istraživanju istaknuo osmišljavanjem i rješavanjem problemskih zadataka riječima. Brzo je rješavao zadatke, ali bez konkretnog objašnjenja dobivenog rješenja (<https://youtube.com/shorts/pWXsHflmj4?feature=share>). Na nastavi matematike često je želio pomoći drugim učenicima pa je postavljao pitanja poput: „Učiteljice, da im pomognemo?“ Premda je na taj način ponekad ometao nastavu, ohrabrila me činjenica što je samoinicijativno, ali i na moju zamolbu, pomagao učenicima kada im je pomoć bila potrebna. Iz toga se može uočiti pozitivna promjena u prijateljskim odnosima koja je ostvarena za vrijeme nastave matematike.



Slika 40. Trgovina matematičkim novcem

E. F. je aktivnim sudjelovanjem za vrijeme istraživanja pokazala svoju zainteresiranost za nastavne sadržaje iz matematike. Rado se uključivala u bilo koju matematičku aktivnost, a

osobito se istaknula osmišljavanjem igre „Trgovina matematičkim novcem“ (slika 37). E. F. je time privukla pozornost svih učenika koji su se okupili oko jedne klupe jer im se svima svidjela zamisao matematičke trgovine. Učenica je pokazala visoku motivaciju za učenjem matematike koja je u pogodnom trenutku rezultirala kreativnim uratkom. Osim toga, E. F. je poučena velikim interesom drugih učenika za igru osmislila drugu igru koju je nazvala „Matematičke nekretnine“ (<https://youtu.be/L5GC5vXGaew>).



Slika 41. Učenje u paru učenice Ž. B.

Ž. B. je rado učila u paru. U paru je rješavala različite tipove jednostavnih zadataka. Određivala je vrijednost nepoznatoga člana u računskom izrazu uz manju nesigurnost, a prikupljene podatke prikazivala je jednostavnim tablicama i piktogramima. U igri „Matematička trgovina“ također je uspješno rješavala zadatke surađujući u paru (slika 38).

J. S. je u kontaktu s drugim učenicima i dalje bila zatvorena i šutljiva. Tijekom nastave bilo ju je potrebno usmjeravati pa joj je u tome pomagala pomoćnica na nastavi. Na videozapisima je vidljivo kako je često bila slabije koncentrirana na nastavi i stalno je tražila pomoć učiteljice. Najveću promjenu J. S. je postigla tako što je na kraju istraživanja bila spremna rješavati problemske zadatke. Iako je problemske zadatke rješavala, često bi to činila uz pomoć. Bez većih problema rješavala je poznate, srednje teške zadatke. I dalje je bila spora u rješavanju zadataka, ali je uspijevala dati odgovarajuća rješenja uz nepotpuna i nesigurna objašnjenja. Prihvaćala je nove koncepte, ideje i zakonitosti i kasnije ih je primjenjivala u poznatim situacijama služeći se odgovarajućom matematičkom terminologijom.

5.3. Opis i interpretacija ostvarenih aktivnosti koje doprinose suštinskim promjenama u nastavi matematike

5.3.1. Učenje utemeljeno na učeničkom predznanju

Jedna je od značajki kvalitetne nastave matematike utvrđivanje *predznanja učenika*. Sumativnim vrednovanjem ostvarila sam procjenu predznanja učenika na početku školske godine 2021./2022. Rezultati predznanja učenika drugog i trećeg razreda te provedena analiza ukazali su mi na probleme u učeničkom znanju. Problemi koju su se konstantno pojavljivali jesu nesamostalnost u dolaženju do zaključaka tijekom rješavanja problemskih zadataka, poteškoće s razumijevanjem uputa tijekom rješavanja i poteškoće tijekom rješavanja težih problemskih zadataka s više koraka kao i praktična primjena naučenog.

Važno je naglasiti kako se učenje temelji na povezivanju novih podataka s onim znanjem koje učenici trenutno posjeduju. Kako bismo olakšali proces učenja potrebno je aktivirati ono što učenici već znaju. To sam između ostalog učinila *matematičkom slagalicom* kojom su učenice trećeg razreda u paru ponovile nastavne sadržaje prethodnog razreda. Taj oblik nastave odabrala sam jer učenje u manjim grupama ili u paru promiče rješavanje problemskih zadataka. Retnowati i sur. (2018) smatraju da učenici kroz suradnju u učenju matematike primaju znanje od ostalih članova grupe i reorganiziraju ga te povezuju novo znanje sa starim znanjem pohranjenim u dugoročnu memoriju. Rješavajući zadatke učenice su trebale složiti sliku Hrvatskog olimpijskog dana koji u školi obilježavamo 10. rujna (<https://youtu.be/ZDhH-80FfhI?t=582>). Učenice su rješavale problemske zadatke s kojima su se susretale u drugom razredu. Na primjer, pri uvježbavanju oduzimanja brojeva do 20 rješavale su zadatke u kojima su trebale primijeniti i neku drugu poznatu računsku operaciju.

Prethodno znanje aktivirala sam tjelesnom aktivnošću „Matematika u pokretu“ u kojoj su sudjelovali učenici drugog razreda. Ta se igra provodi kada učenici već poznaju matematičke operacije. Pokazala sam učenicima kako će oznaku matematičke operacije prikazati tijelom. Na primjer, znak minus predstavlja skok uz ispružene ruke, plus se izražava skokom i rukama u znaku plusa, znak jednako predstavljen je skokom i rukama usporedno ispruženim ispred tijela. Brojevi se izvode tako da učenici pljesnu odgovarajući broj puta. Na taj način ponovili smo prikazivanje računskih operacija zbrajanja i oduzimanja. Svi učenici bili su aktivni i zainteresirani (<https://youtu.be/t7V6Drfxde4?t=210>).

3 - ZNAM.	2 - NE ZNAM?	1 - SIGURAN SAM!
Geometrija Brojeva črtā djeljenje	Zbrajanje i oduzimanje do 1000	Množenje do 100

Slika 42. 3-2-1 obrazac

Predznanje sam utvrdila 3-2-1 obrascem koji su učenici koristili nakon aktivnosti u paru ili u grupi. Učenici su napisali tri stvari za koje misle da znaju, dvije stvari koje znaju da ne znaju te nešto u čemu su potpuno sigurni (slika 42). Učenici su tom aktivnošću potaknuti da promisle o svakoj nastavnoj temi, ispune obrazac i na taj način oblikuju vlastiti dnevnik učenja (<https://youtu.be/t7V6Drfxde4?t=2710>).

Tijekom akcijskog istraživanja u nastavi sam primjenjivala i kvizove kojima sam na brz način provjerila učeničko predznanje. Za to sam koristila aplikaciju Kahoot (<https://create.kahoot.it/share/zbrajanje-i-oduzimanje-brojeva-do-100/ce7d4cb5-3417-42bd-b677-ebaa7a73458f>) i Google Forms (https://docs.google.com/forms/d/1-aRTrH2EQG_bNN4U-RT8-CAN1SFaFijqDHnWPxMjguE/edit?usp=sharing). Kahoot može poslužiti za natjecanje jer odgovaranjem na pitanja učenici dobivaju određeni broj bodova i na kraju se proglašavaju pobjednici. Google Forms omogućuje provedbu individualnih ispita s time da učitelj ima uvid u rješenja svih učenika.

Kako bi se aktiviralo prethodno znanje potrebno je koristiti strategije koje uključuju čitanje, pisanje, raspravljanje, glasno razmišljanje te vizualne znakove ili organizatore znanja (Campbell, 2008). U nastavi sam koristila aktivnost asocijacija. Odnosno, učenici su trebali navesti sve što ih podsjeća na zadani pojam. Cilj je bio navesti što više ideja, a sve predložene ideje bile su prihvaćene i zabilježene na ploči, čak i one neobične. Učenici su iznosili svoje ideje na traženi pojam razlika. Navedene asocijacije poslužile su nam za aktiviranje prethodnog

znanja (<https://youtu.be/M6hm5-IJCgw>). Pri izradi organizatora učenici su provjerili jesu li zasebni dijelovi smisleno povezani i stavljeni u pravilne međudnose (slika 43).



Slika 43. Zapisivanje učeničkih asocijacija na ploči

Nadalje, učenice trećeg razreda koristile su *osmosmjerku* u kojoj su bili sakriveni matematički pojmovi koje smo učili u prijašnjim razredima. „Osmosmjerka“ (2020) „je vrsta križaljke u kojoj se riječi pružaju u osam smjerova unutar zadanog okvira – vodoravno slijeva nadesno i obrnuto, okomito odozgo kao i dolje i obrnuto te u četirima dijagonalama.“ Zadatak je bio pronaći pet pojmova koji su sakriveni u slovima i upisati ih na crte do tablice. Učenice su u početku s lakoćom pronašle nekoliko skrivenih pojmova, ali kasnije su morale uložiti više truda i napora kako bi riješile zadatak do kraja. Ovu aktivnost odabrala sam kako bi se učenice prisjetile matematičkih pojmova. Pretpostavila sam da ih poznaju budući da su ih učile prijašnjih godina. Na kraju su uz moju pomoć izvršile zadanu aktivnost (<https://youtu.be/QPQlbtKznTw?t=11>).

Utvrđivanje prethodnog znanja ostvarila sam i ponavljanjem zadataka zbrajanja i oduzimanja konkretnim materijalom. Učenici su se služili konkretnim materijalom koji se nalazio na njihovim stolovima za provjeravanje točnosti rješavanja zadatka. Glasnović Gracin i Jerec (2012) smatraju važnim uključiti konkretne materijale u početnu nastavu matematike. Jedan su od poznatijih konkretnih materijala Stern blokovi. To je komplet kocaka s kojima se jednostavno prezentiraju dekadski brojevni sustavi i odgovarajuće računске operacije. Osim toga, učenicima pomažu u usvajanju pojma broja i odnosa među brojevima. Za učenike je vizualizacija jako važna. Djeca se koriste mentalnim slikama kako bi razvila svoje mišljenje, a

Stern blokovi im u tome pomažu. Nije dovoljno u glavi samo stvoriti sliku nekog pojma već ga treba vizualno razlikovati u odnosu na druge pojmove. Učenicama trećeg razreda usmeno sam pročitala zadatak: Marija je u kupovini potrošila iznos od 274 kune. Na blagajni je platila novčanicom od 100 kuna i 200 kuna. Koliko je novaca Mariji ostalo? Učenice su zadatak trebale rješavati u paru. Uputila sam ih da u bilježnicu zapišu postupak rješavanja. Učenice nisu bile sigurne kako riješiti zadatak, stoga su tražile pomoć. Nakon što sam ih usmjerila na rješavanje zadatka uspješno su ga prikazale konkretnim materijalom (<https://youtu.be/JOqystMJyE4?t=290>).

Smisao utvrđivanja i uvažavanja učeničkog predznanja nije toliko u popravljaju učenikovih slabosti i popunjavanju praznina, već u iskorištavanju postojećeg matematičkog znanja i vještina. Učinkovita nastava matematike temelji se na onome što učenici već znaju. Osim toga, učenik prethodno znanje može koristiti pri rješavanju novih problemskih zadataka te mu može poslužiti kao ključ za razvoj strategija rješavanja problema.

Usljed nepravilnog korištenja predznanja tijekom novog učenja mogu se pojaviti poteškoće. Naime, ako učenik ne identificira korisno predznanje do učenja ne mora ni doći, a osim toga ako predznanje koje učenik koristi ne zadovoljava potrebe zadanog problema također može izazvati poteškoće tijekom učenja. Nadalje, može se dogoditi da učenik prepozna prethodno znanje, ali da ga ne upotrebljava na odgovarajući način tijekom rješavanja zadanog problema (Sidney i Alibali, 2013). Na primjer, kod učenice J. S., kojoj su dijagnosticirane teškoće u učenju matematike, predznanje nije došlo do izražaja jer ga nije u dovoljnoj mjeri imala.

Konstruktivisti smatraju da je novo znanje učenika potrebno nadograditi na prethodno pri čemu učenici trebaju aktivno konstruirati svoje znanje, a ne ga pasivno prihvaćati. Osim toga, smisao novih koncepata dolazi do izražaja kada se integrira u postojeće strukture znanja. Novo znanje povezuje se s već formiranim shemama (Pritchard, 2008; Schunk, 2012). Shema se odnosi na organizaciju i pohranu prethodnih informacija. Utvrđivanje onoga što učenici već znaju ostvarili smo različitim aktivnostima (npr. u kojoj su učenici trebali navesti što više pojmova povezanih s pojmom razlika). Sve dok je prethodno znanje točno i nadovezuje se na nove sadržaje koristi procesu učenja. Međutim, učenici trebaju pripaziti tijekom učenja novih sadržaja kako ne bi primijenili pogrešne strategije na nove problemske situacije. Kada učenicima nedostaje predznanje učenje je sporo jer zahtijeva izgradnju sheme iz temelja. Nadogradnja na prethodno znanje poboljšava konceptualno razumijevanje te potiče pozitivan stav prema učenju novih pojmova.

5.3.2. *Izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja*

Sljedeća značajka kvalitetne nastave matematike odnosi se na *izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja*. Suvremena nastava matematike usmjerena je na konceptualno znanje, za razliku od tradicionalne nastave koja traži od učenika usvajanje proceduralnog znanja. Proceduralno znanje odnosi se na rješavanje određenog tipa problemskih zadataka. Učenici te naučene postupke mogu primijeniti samo na tu vrstu zadataka.

Unapređenje nastave matematike stavljanjem naglaska na konceptualno znanje uz istovremeni razvoj proceduralnog znanja ostvarila sam stavljanjem većeg naglaska na poučavanje vođenim otkrivanjem. Učenici su uz moje vođenje sami dolazili do rješenja problemskih zadataka. Odnosno, učenicima sam omogućila da do rješenja zadataka dođu na temelju samostalnog zaključivanja. Na primjer, učenicima sam pročitala zadatak: Na Ivanovom rođendanu bilo je 16 gostiju. Malo kasnije došla je grupa u kojoj je bilo 9 dječaka i djevojčica, a odmah poslije njih došla je grupa od 6 prijatelja. Od učenika sam tražila da otkriju koliko je ukupno bilo gostiju na Ivanovom rođendanu. Također sam tražila da samostalno objasne načine na koje će riješiti ovaj zadatak. Svaki od učenika izračunao je da je na Ivanovom rođendanu bio 31 gost. Neki od učenika do rezultata su došli računajući $16 + 9 = 25$, a zatim $25 + 6 = 31$. Drugi su učenici broju gostiju koji su se nalazili kod Ivana dodali zbroj onih koji su dolazili, tj. broju 16 dodali su rezultat zbroja $9 + 6 = 15$, a zatim su to zbrojili ($16 + 15 = 31$). Rezultati su uglavnom bili točni. Dobili su ih računajući na dva načina. Te sam načine napisala na ploču, a oni su ih zapisali u bilježnice. Zaključili su da se rezultat nije promijenio kada su ga izračunali na jedan ili drugi način (<https://youtu.be/aelixCJ4GBbo?t=1264>). Nakon toga sam od učenika tražila da sami osmisle sličnu problemsku situaciju u obliku novog zadatka.

Poznato je da u nastavi matematike postoje matematički postupci koje učenici trebaju automatizirati. Međutim, bez dubljeg razumijevanja pitanje je koliko je takvo znanje kvalitetno i dugotrajno, stoga je važno voditi računa i o konceptualnom znanju. Proceduralno znanje provjerava se praćenjem izvođenja zadanog postupka gdje je naglasak stavljen na brzini i točnosti računanja. Međutim, pri poučavanju potrebno je tražiti od učenika neka obrazloženja svoje odgovore. Odnosno, trebali bi sami doći do zaključka i otkriti koji je postupak najprikladniji i najproduktivniji u danoj situaciji, što se njime postiže te kakve rezultate mogu očekivati. Mehaničko izvođenje postupka bez razumijevanja njegove matematičke osnove često dovodi do pogrešnih tumačenja rezultata. Zbog toga je važno usmjeriti se na konceptualno znanje čijem razvoju doprinosi rješavanje složenijih matematičkih problema kao i zadatke otvorenog tipa. Zadatci otvorenog tipa potiču različite oblike učeničkog mišljenja, učenici aktivnije sudjeluju

na nastavi, osim toga omogućuje im se samostalno zaključivanje. Zbog toga sam od učenika tražila da u grupama ili parovima riješe problemske zadatke koji u pravilu nemaju jedan točan odgovor.

Osim toga, učenice trećeg razreda rješavale su nastavni listić na kojem su bili napisani zadatci koje trebaju riješiti služeći se dijagramom i tablicom. Dijagram na slici prikazivao je količinu voća u kilogramima koje je trgovac u jednom danu prodao na tržnici, a tablica je prikazivala cijene voća (slika 44). Prema podacima iz dijagrama i/ili tablice učenice su trebale riješiti zadatke (<https://youtu.be/qe-oINESSuM?t=1993>).



Slika 44. Rješavanje problemskih zadataka uz korištenje tablice ili grafikona

Nadalje, pomoću konkretnog materijala omogućila sam učenicima usvajanje konceptualnog znanja kao i prevladavanje zaostajanja u usvajanju matematičkih sadržaja (Smith i sur., 2013; Gersten i sur., 2012). Na videozapisu (<https://youtu.be/PRBea842ljk>) moguće je vidjeti kako učenica rješava zadatak zbrajanja ($198 + 73$) koristeći kockice i pločice koje su označavale stotice, desetice i jedinice. Rješavajući zadatak učenica je 16 desetica (žuti štapići) zamijenila jednom stoticom (zelena pločica). Isto tako umjesto jedanaest jedinica uvela je jednu deseticu zamijenivši ju s deset jedinica (kockica). Manipulirajući konkretnim materijalima mogla je razumjeti postupak zbrajanja u kojemu broj jedinica ili desetica prelazi deset, odnosno građenju proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja.

Banić (2013) predlaže kao način poticanja konceptualnog razumijevanja zadatke u kojima su ponuđene točne i netočne tvrdnje. Od učenika se traži odgovor kojim potvrđuju je li tvrdnja točna ili netočna te obrazlaganje odgovora (<https://youtu.be/qe-oINESSuM?t=1993>). Poticanjem učenika na objašnjenje svog načina mišljenja pri rješavanju problema doprinosi konceptualnom znanju.

5.3.3. Korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema

Suvremena nastava zahtijeva učeničku uključenost u rješavanje problema i raspravu o zadacima koji promiču matematičko zaključivanje. Učenicima treba nuditi bogate i izazovne zadatke koji omogućuju odlučivanje, promoviraju raspravu i komunikaciju, potiču originalnost i otkriće (Jukić Matić i sur., 2020). Cindrić (2016) definira rješavanje problema kao pronalaženje odgovora na pitanje koje zadatak traži, a za čije rješenje nije unaprijed poznat postupak. Rješavanje takvih zadataka od učenika zahtijeva koncentraciju i intelektualni napor. Rješavanjem problemskih zadataka učenici razvijaju misaone i stvaralačke sposobnosti, te primjenjuju usvojeno matematičko znanje. Problemski zadatci najčešće su zadani riječima te traže odgovor do kojeg učenici dolaze istražujući i otkrivajući. Takvi zadatci mogu imati nekoliko točnih rješenja. Za problemske zadatke važno je da odražavaju poznate životne situacije kako bi učenici mogli matematičko znanje primjenjivati u praktičnim situacijama. Učenici rješavajući problemske zadatke jačaju svoje samopouzdanje, kreativnost, stvaralaštvo, poboljšavaju kritičko mišljenje te se osposobljavaju za primjenu matematike u raznim životnim situacijama. Prema Sinay i Nahornic (2016) problemski zadatci pružaju mogućnost povezivanja matematičkih ideja i razvijanje konceptualnog razumijevanja.

U sklopu korištenja zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema primijenila sam strategiju *izrade crteža* koju Posamentier i Krulik (2009) predlažu kao jednu od strategija primjenjivu za rješavanje različitih problemskih zadataka. Učenici su crtežom trebali razjasniti problem kako bi ga mogli riješiti, odnosno, doći do određenog zaključka. Zatim su rješavali zadani problemski zadatak. Matematičko znanje koje im je bilo potrebno bilo je znanje prebrojavanja skupova.

U narednoj aktivnosti učenici su trebali na odgovarajućim mjestima na radnom listiću zalijepiti sličice likova (vuk, baka, jelen...) te prebrojiti članove skupa. A zatim su izrezivali dijelove Crvenkapičine odjeće (haljine i šeširi) te su slagali različite odjevne kombinacije, ali tako da se boje ne ponavljaju. To je rezultiralo učeničkim radovima koji su prikazani na slici

45. Glasnović Gracin (2014) ističe model skupa za razumijevanje matematičkih koncepata. Glavna je aktivnost modela skupa prebrojavanje njegovih elemenata. Pritom je s djecom važno utvrditi da drugačiji položaj ili redoslijed elemenata u nekom skupu ne mijenja njihov broj. Učenik u početku ima realnu problemsku situaciju zadanu riječima. Nakon toga slijedi modeliranje konkretima, crtežom ili shemom što može pomoći učeniku u rješavanju problema (Cindrić, 2016).

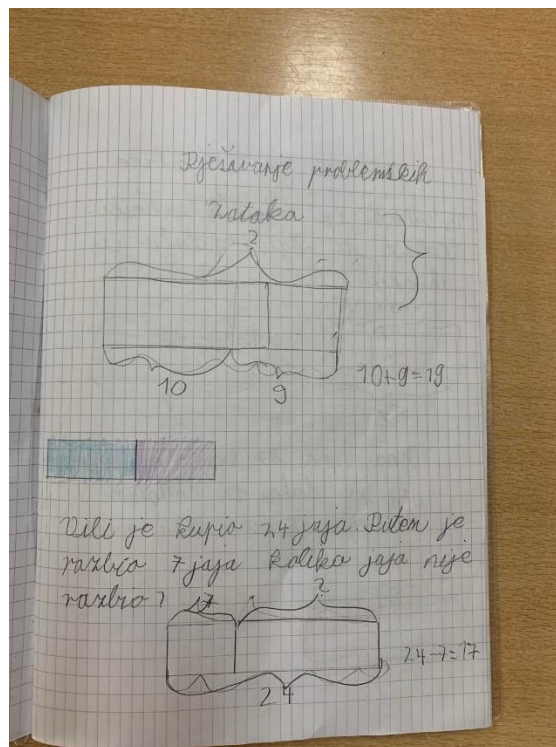


Slika 45. Odjevne kombinacije koje su sastavili učenici

Rješavanje problemskih zadataka riječima ovisi o razlikama u koncentraciji pojedinih učenika. Osim toga, povoljni su uvjeti nastave i učenja važni jer smanjuju ometanje učenika dok su usmjereni na rješavanje zadataka (Suurtamm, 2015). Nadalje, i razumijevanje matematičkih sadržaja igra važnu ulogu pri rješavanju problemskih zadataka riječima. Na kraju, Tsuei (2015) i deKock i Harskamp (2014) ističu da tijekom rješavanja matematičkih problemskih zadataka važnu ulogu ima učenička suradnja.

Učenici su problemske zadatke rješavali prema pristupu model dio – cjelina iz singapurskog modela služeći se pravokutnicima kao slikovnim prikazom modela. Učenicama trećeg razreda projicirala sam zadatke na ploču. Prije rješavanja problemskih zadataka, važno je ponoviti korake koji su potrebni tijekom rješavanja problemskih zadataka. Zbog toga smo na početku ponovili važne korake u rješavanju problemskih zadataka. Pitala sam učenice žele li zadatke rješavati samostalno, na mjestu ili na ploči. Rekle su da ih žele rješavati pred pločom (<https://youtu.be/QPQlbtKznTw?t=1064>).

U singapurskom modelu rješavanja zadataka svaki novi apstraktni koncept uči se na temelju konkretnog iskustva. Učenici prvo rukuju stvarnim predmetima prije prelaska na modele koji se koriste za predstavljanje predmeta. Također je prisutna i stvaralačka faza pomoću konkretnih predmeta za modeliranje problemskih zadataka. Tijekom rješavanja zadataka učenice su koristile pravokutnike kao model cjeline (slika 46). Prema Jukić Matić i Širić (2018) model usporedbe koristi se za zbrajanje i oduzimanje u zadacima koji u sebi sadrže izraze više od i manje od. Zbrajanje se koristi kako bi se pronašla ukupna vrijednost dviju veličina, a oduzimanje kako bi se utvrdila razlika između dviju veličina, kao i jedna veličina ako je zadana druga i razlika između njih (<https://youtu.be/QPQlbtKznTw?t=1064>).

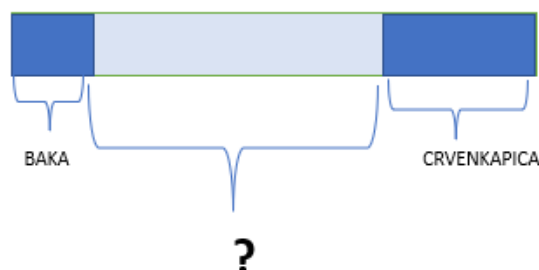


Slika 46. Primjer rješenja problemskog zadatka prema pristupu model – dio cjelina singapurskog modela

1. CRVENKAPICA I BAKA ZAJEDNO SU NA TANJURU IMALE 16 KOLAČA. KADA JE CRVENKAPICA POJELA 4 KOLAČA, A BAKA 2 KOLAČA OSTAO IM JE JEDNAK BROJ KOLAČA. KOLIKO JE KOLAČA U POČETKU NA TANJURU IMALA CRVENKAPICA, A KOLIKO BAKA?

RAČUN:

ODGOVOR:



Slika 47. Problemski zadatak čiji je sadržaj povezan s bajkom o Crvenkatici


Stav o uspješnosti uvođenja singapurskog modela u nastavu matematike (slika 47) drugog razreda izrazio je mentor u svom osvrtu na nastavu matematike:

Problemski je zadatak izvrsno postavljen i zahtijevao je od učenika dublje promišljanje. Kako bi im pomogli u rješavanju zadatka uveli ste grafički prikaz preuzet iz singapurskog modela. Kaur (2019) ističe kako nema puno istraživanja koja potvrđuju učinkovitost korištenja grafičkih modela u nastavi matematike. Unatoč tome, provedena istraživanja idu u prilog njihovu korištenju pri rješavanju problemskih zadataka. Zbog toga je dobro što pokušavate uvesti tu metodu već u drugom razredu. (B. Bognar, osobna komunikacija, 13. studenoga 2021.)



Slika 48. Problemski zadatak čiji je sadržaj kreiran u Wordwall aplikaciji

Učenici su drugog razreda u Wordwall aplikaciji zavrtili čarobni kotač, pročitali napisani zadatak te osmislili problemski zadatak riječima (slika 48). Ovaj način rješavanja zadataka učenicima nije bio nimalo jednostavan jer su morali uložiti dodatni napor osmišljavajući zadatke i zapisujući ih u bilježnice. Učenica M. J. pročitala je svoj problemski zadatak drugom paru: „Maja je od svoje prijateljice dobila 28 bombona. Prijateljici je darovala 5 bombona. Koliko bombona sada ima Maja?“ (<https://youtu.be/OEUo62lexwE?t=1914>).

EVALUACIJSKI LISTIĆ					
1. INDIVIDUALNO VOLIM RJEŠAVATI ZADATKE IZ MATEMATIKE.	1	2	3	4	5
2. PROBLEMSKE ZADATKE ČESTO RJEŠAVAMO NA SATU MATEMATIKE	1	2	3	4	5
3. U SKUPINAMA VOLIM RJEŠAVATI ZADATKE IZ MATEMATIKE.	1	2	3	4	5
4. SAT MATEMATIKE MI SE SVIĐIO:	1	2	3	4	5
5. SAT MATEMATIKE MI SE NIJE SVIĐIO:	1	2	3	4	5
6. KAKO SAM SE OSJEĆAO/LA NA OVOM SATU?					
Postoji li nešto što bi učiteljica mogla unaprijediti kako bi nastava bila još bolja? Ako je odgovor da, što bi to bilo? <u>RJEŠAVO BI PROBLEMSKE ZADATKE</u>					

Slika 49. Primjer evaluacijskog listića učenika

Posamentier i Krulik (2009) ističu kako se za rješavanje različitih problemskih zadataka mogu koristiti *organizirani podatci u tablicama ili grafikonima*. Učenice trećeg razreda rješavale su problemske zadatke koristeći podatke prikazane na dijagramima. Nakon te

aktivnosti, ponovili smo da bilježiti ili očitavati prikupljene podatke možemo tablicama ili dijagramima. Svaka tablica ima retke i stupce. Osim toga, crtež s podacima u matematici naziva se dijagram i najčešće koristimo slikovne i stupčaste dijagrame. Podatci ili problemi koji su vizualno prikazani pružaju mogućnost uočavanja veze ili pronalaženja uzorka. Tablica pruža izvrstan način praćenja podataka i procjenjivanja pretpostavki. Učenicama je ova aktivnost bila zanimljiva i uspjele su točno odgovoriti na postavljena pitanja. Točnost riješenih zadataka provjerile su sa mnom na ploči, a najvažnije pojmove zapisale su u bilježnicu (<https://youtu.be/R2NvwDz9IQg?t=1667>).

U evaluacijskom listiću učenici su iskazali svoje dojmove nakon rješavanja problemskih zadataka (slika 49). Učenice trećeg razreda bile su zadovoljne što su imale mogućnost naučiti rješavati zadatke koristeći singapurski model. Vrlo brzo, nakon samo nekoliko jednostavnih primjera, primijenile su singapurski model u rješavanju različitih zadataka. To ukazuje da bi se taj model mogao lako uvesti u početnu nastavu matematike ako bi se učitelji osposobili za njegovo korištenje te ako bi imali na raspolaganju odgovarajuće udžbenike. Čini se da je učeničkom zadovoljstvu doprinijelo i korištenje konkretnih materijala. Naime, „ništa ne može zamijeniti dragocjenost taktalnog osjeta dječjeg dlana s konkretnim predmetom, jer učenik jednostavno treba osjetiti konkretno kako bi bio spreman krenuti na put prema apstraktnom“ (Glasnović Gracin i Herjavec, 2010, str. 60).



Slika 50. Osmišljavanje matematičke priče na temelju slike

Osim toga, učenicima sam dala da rješavaju problemske zadatke s kojima se prije nisu susreli sami otkrivajući rješenja. Učenice trećeg razreda dobile su zadatak u kojemu su na temelju fotografije trebale osmisliti matematičku priču (slika 50). Samostalno rješavanje problemskih

zadataka ima velik pedagoški značaj tako da im nisam sugerirala odgovore do kojih su sami trebali doći. Učenicima trećeg razreda pružala sam pomoć tijekom rješavanja zadataka, ali do zaključaka su došle samostalno. Ako učenicima zadamo neka sami osmisle problemsko pitanje i rješenje, omogućavamo da njihova kreativnost dođe do izražaja (<https://youtu.be/M6hm5-IJCgw?t=1829>).

Suurtamm (2015) ističe važnost poticanja učenika na samostalno traženje strategija rješavanja problema umjesto da im se daje set pravila i postupaka. Također je bitno i stvaranje okruženja u učionici u kojem se učenici osjećaju sigurno riskirajući i istražujući alternativne strategije pomoću kojih mogu, ali ne moraju doći do rješenja problema. Potrebno je poticati učenike da podijele svoja razmišljanja jedni s drugima i s cijelim razredom.

Učitelji bi u nastavi matematike trebali osposobiti učenike za uspješno rješavanje i postavljanje problemskih zadataka. Na nastavi matematike treba prevladavati takva vrsta zadataka, ali oni učenicima moraju biti prezentirani na atraktivan i privlačan način. Tome doprinosi povezivanje problemskih zadataka sa stvarnim životom. Osim toga, problemske situacije koje učitelj iznosi pred učenike trebaju biti primjerene uzrastu i njihovim mentalnim sposobnostima. Odnosno, treba voditi računa o nivou znanja koje učenici posjeduju kako bi mogli odgovoriti na zahtjeve koje učitelj pred njih postavlja. Zadatci bi trebali biti tako osmišljeni da ulaze u zonu proksimalnog razvitka. U to ulaze zadatci koje učenik nije u stanju samostalno riješiti, ali ga može riješiti uz pomoć i vođenje odraslih ili iskusnijih osoba (Denhere i sur., 2013). Dakle, problemski zadatci ne trebaju biti ni suviše laki, ali ni previše jednostavni kako ne bi izostala misaona aktivnosti učenika. Osim toga, nužno je da učenici posjeduju prethodno znanje, iskustvo stečeno u prijašnjim situacijama i motivaciju za rješavanje problema. Pri postavljanju problemskih zadataka zahtjevi za učenike trebaju biti nešto viši od njihovih trenutnih mogućnosti. Učitelji im trebaju pružiti potporu dok oni ne budu sposobni samostalno riješiti zadatak. Tu potporu možemo opisati kao skele koje učenika vode do rješenja. Skele se odnose na podršku koja se pruža učenicima dok pokušavaju usvojiti nove sadržaje u zoni proksimalnog razvitka. Podrška može uključivati praktične aktivnosti ili izravnu poduku. U početku učitelj učeniku pruža veću podršku. Međutim, s vremenom se podrška smanjuje dok učenik ne ovlada novim znanjem ili vještinom. Zadatci im na taj način predstavljaju izazov, a istovremeno ne izazivaju dosadu zbog lakoće rješavanja.

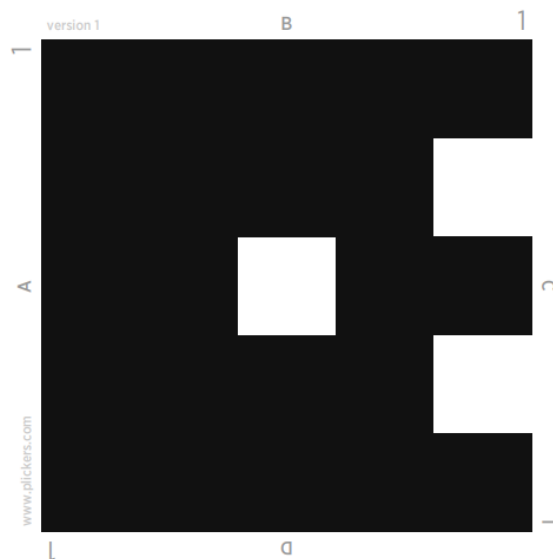
U komentiranje nastave uključila se i kritička prijateljica Ivana Šustek koja je izrazila svoje zadovoljstvo tijekom pregleda videozapisa nastave matematike. U svom komentaru usmjerila se na učeničko rješavanje problemskih zadataka:

Nastavu si dobro strukturirala tako da su cijelo vrijeme bile prisutne određene aktivnosti bez praznog hoda. Posebno mi se sviđjala velika uključenost učenika kao i njihova međusobna suradnja koja se ostvarila rješavanjem problemskih zadataka kroz igru. Inače, velike su prednosti učenja rješavanjem problema. Prema Lučić i Matijević (2004) glavne su prednosti razvijanje stvaralačkih sposobnosti, upornosti, radoznalosti, kritičnosti i nadasve suradnje učenika, što se uočava da tvoji vrijedni učenici i postižu. (I. Šustek, osobna komunikacija, 11. studenoga 2021.)

5.3.4. Povratne informacije i tehnologija

NCTM (2014) ističe važnost tehnologije u nastavi i učenju matematike. Craig i sur. (2020) smatraju da tehnologija može poboljšati nastavu matematike, a osim toga stvara kod učenika digitalne kompetencije koje su mu potrebne u suvremenom društvu. Međutim, kod tehnologije je ključno korištenje na odgovarajući način. Ako tehnologiju promatramo kao sredstvo informacija ili računanje u nastavi matematike tada ona uvelike pomaže i može zamijeniti učenikovo mišljenje. Međutim, tijekom rješavanja problemskih zadataka za koje još ne znamo rješenje ili strategiju rješavanja, tehnologija ne može zamijeniti učenikovo mišljenje.

Računalni programi u nastavi matematike omogućuju davanje neposrednih povratnih informacija (Tsuei, 2012). Jedna od aplikacija koju smo koristili na nastavi matematike je Plickers. Ona je namijenjena jednostavnoj provjeri znanja u razredu, a omogućuje i brze povratne informacije. Kako bi Plickers mogli koristiti bili su nam potrebni računalo, projektor, internet veza te tablet na kojemu je preuzeta aplikacija. Nakon što učitelj kreira i postavi pitanja, potrebno je učenicima podijeliti kartice koje svojim izgledom podsjećaju na QR kodove (slika 51).



Slika 51. Plickers kartica

Kartice su imale na sebi identifikacijske brojeve koji su dodijeljeni učenicima. Na karticama su prikazani odgovori (A, B, C, D) koji su dovoljno maleni tako da ih drugi učenici ne mogu vidjeti. Učenici su podizali svoje kartice tako da su odgovor koji su smatrali točnim postavili na vrh kartice. Mobitelom sam očitala kartice s odgovorima. Na mobitelu sam odmah dobila povratnu informaciju o točnim odgovorima svakog učenika, dok su učenici na platnu vidjeli zbirne rezultate. Svi su odgovori bili pohranjeni u aplikaciji što mi je omogućilo da naknadno provedem analizu rješavanja zadataka (slika 52). Korištenjem aplikacije Plickers učenici su odmah dobili povratnu informaciju o odgovorima svih učenika kao i povratnu informaciju o točnosti svog rješenja pojedinog zadatka (<https://youtu.be/LLHiEh5fDpw?t=242>).








Slika 52. Provjeravanje učeničkih odgovora pomoću aplikacije Plickers



Slika 53. Igra „Tko želi biti milijunaš“

Osim toga, koristili smo i *online* igru „Tko želi biti milijunaš“ (<https://learningapps.org/watch?v=pj9yuq8qc21>) što je razveselilo učenice trećeg razreda. Bile su zainteresirane i aktivne pa mi je bio užitak voditi ovu aktivnost (slika 53). Da su učenicima takve aktivnosti zanimljive svjedoče rezultati evaluacijskog listića u kojemu je učenica E. F. procijenila održanu nastavu te su napisale svoj prijedlog za unapređenje: „Da se više igramo i vježbamo problemske zadatke“ (slika 54).

EVALUACIJSKI LISTIĆ					
1. INDIVIDUALNO VOLIM RJEŠAVATI ZADATKE IZ MATEMATIKE.	1	2	3	4	5
2. PROBLEMSKE ZADATKE ČESTO RJEŠAVAMO NA SATU MATEMATIKE.	1	2	3	4	5
3. NA SATU MATEMATIKE MI SE NAJVIŠE SVIJDJELO:	Rješavanje kurzova				
4. NA SATU MATEMATIKE MI SE NIJE SVIJDJELO:	Na satu matematike mi se se				
5. KAKO SAM SE OSJEĆAO/LA NA OVOM SATU?	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>TUŽAN</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>POLU SRETAN</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>SRETAN</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>NERASPOLOŽEN</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>LUŽIT</p> </div> </div>				

Navedite svoje prijedlog za unapređenje kvalitete nastave:

Da se više igramo problemske zadatke i da ih vježbamo

Slika 54. Evaluacijski listić

Nadalje, učeničko znanje odlučila sam provjeriti i kvizom Kahoot (slika 55). Kahoot je *online* aplikacija za izradu kvizova ili anketa koji omogućuje natjecanje. Učenici svoje odgovore daju pomoću računala, tableta ili mobilnog uređaja koji mora biti spojen na internet. Učenici na zaslonima svojih uređaja nemaju prikazane odgovore, nego polja označena različitim bojama i simbolima. Zadatak je odabrati onaj simbol koji označava točan odgovor. Za svaki točan odgovor učenici dobivaju određeni broj bodova. Nakon što odgovore na pitanja

učenici vide jesu li točno odgovorili, koliko imaju bodova, ukupan broj bodova i svoje mjesto na ljestvici prema rezultatima ostalih učenika.



Slika 55. Proglašavanje pobjednika u Kahoot kvizu

Kahoot kviz bio je kreiran od pitanja s mogućnošću višestrukog odgovora kao i od pitanja u kojima se trebalo procijeniti je li odgovor točan ili netočan. Pitanja sam projicirala na ploči kako bi ga mogli vidjeti svi učenici. Učenici drugog razreda pomoću ove aplikacije odmah su dobili povratnu informaciju o točnosti svojih, ali i odgovora drugih učenika (<https://youtu.be/LLHiEh5fDpw?t=1556>).

Učenice trećeg razreda uz prethodno objašnjenje rješavale su kviz u Google Forms obrascu u kojem su bili navedeni zadatci kojima se provjeravala usvojenost nastavnih sadržaja. Fray i Fisher (2011) ističu da kratki *kvizovi* mogu biti korisni za ponavljanje znanja, ali to ne znači nužno da doprinose učenju. Kviz ili test treba sadržavati korektivnu povratnu informaciju. Ovim kvizom učenice su dobile povratnu informaciju o točnosti riješenih zadataka (<https://youtu.be/AfP8JfIFcNE?t=1502>). Naime, nakon što su učenice riješile kviz i kliknule tipku „Podnesi“ odgovori su se odmah prikazali učiteljici. Na taj način automatski su dobile povratnu informaciju od učiteljice o točnosti odgovora odmah po završetku rješavanja zadataka.

Na nastavi matematike cilj mi je bio što češće dati učenicima pravovremene povratne informacije kako bi ih usmjeravale u procesu učenja. Osim toga, nastojala sam ih potaknuti na davanje povratnih informacija svome paru ili ostalim učenicima u razredu. Učenice trećeg razreda procjenjivale su svoja postignuća kao i postignuća svog para na temelju dogovorenih

kriterija uspješnosti. Dobile su zadatke na papiru koje su trebale rješavati samostalno koristeći samoljepljive listiće u boji (slika 56). U bilježnicu su nakon svakog riješenog zadatka lijepile zelenu, žutu ili crvenu karticu koje su označavale točno, djelomično točno ili netočno dan odgovor. Na kraju smo analizirale broj točno riješenih zadataka. Samostalnom provjerom i vrednovanjem zadataka učenice sam potaknula na samokritičko vrednovanje vlastita učenja te da postanu svjesne vlastitih pogrešaka.



Slika 56. Učeničko samovrednovanje

I u ovom slučaju učenice su ispunile evaluacijski listić u kojemu su pokazale da im je bilo zanimljivo i da se osjećaju sretno na ovakvoj nastavi matematike.

5.3.5. Suradničko učenje

Suradničko učenje važna je značajka kvalitetne nastave matematike. U suradničkom učenju do izražaja može doći aktivno učenje kao važna dimenzija nastave matematike. Suradničko učenje može se ostvariti u paru ili malim grupama pri čemu učenici jedni drugima pomažu, razgovaraju o važnim temama, sudjeluju u razrednim raspravama, produbljuju matematičke ideje (deKock i Harskamp, 2015) ili sudjeluju u igri (slika 57).



Slika 57. Suradnička igra učenika 2. i 3. razreda

Brüning i Saum (2008) smatraju da u suradničkom učenju učenici zajedno uče, ali svatko mora učiti i sam.



Slika 58. Učenje u paru učenica trećeg razreda

Učenice trećeg razreda u paru su ponovile sadržaje zbrajanja i oduzimanja brojeva do 100 i 1000 odlaskom u zamišljenu trgovinu u kojoj su mogle kupiti školski pribor (slika 58). Koristile su se materijalima koji su za njih bili pripremljeni (ruksaci za odlazak u kupovinu i predmeti

koji su se u trgovini mogli kupiti). Raspolagale su iznosom od 1000 kuna koji su međusobno podijelile i u okviru kojega su mogle kupovati. Zbrajale su iznose kupljenih predmeta i računale koliko su potrošile zapisujući to u obliku matematičkih izraza. Kako bi taj zadatak ostvarile, morale su međusobno surađivati i kontrolirati trošenje novca kako ne bi prešle zadani iznos. Učenje u paru omogućava učenicima usvajanje matematičkih sadržaja te poboljšava matematička postignuća, doprinosi učeničkoj motivaciji i stvaranju pozitivnog stava prema matematici (Rutt i sur., 2014). U aktivnostima u paru učenici se međusobno kontroliraju i potiču na učenje. Sposobniji i ekstrovertirani učenici poticati će i uključivati izolirane i introvertirane učenike. Aktivnosti u paru prema Bognar i Matijević (2005) potiču na suradnju i intenzivniju komunikaciju bez koje se ne može postići pedagoški efekt. Nadalje, naglašavaju da aktivnosti u paru pridonose osamostaljivanju učenika, odnosno osposobljavaju ih za samostalno učenje.

U suradničkom učenju do izražaja može doći aktivno učenje kao važna dimenzija nastave matematike. Učenje je potrebno ostvariti u malim grupama kako bi se moglo razgovarati o važnim temama. Osim toga, suradničko učenje pomaže u učenju složenijih materijala. Učenici suradničkim učenjem stječu povjerenje u svoje matematičke sposobnosti te uvažavanje svojih vršnjaka. Učenici mogu analizirati zajednički pronađena rješenja zadataka, a zatim izložiti naučeno (<https://youtu.be/LC2Pz2OZa8k?t=1858>).

Ramani i Eason (2015) predlažu uvođenje igre u suradničke aktivnosti učenika mlađe školske dobi kako bi im nastava matematike bila zabavnija. Ono što učenici ostvaruju na satu matematike, ne mora ostati na satu matematike. Igre i zadatke potrebno je povezati uz druge teme u nastavnom programu i u stvarnom svijetu. U igri „Matematički dvoboj“ učenike drugog razreda podijelila sam u dvije vrste koje stoje jedna nasuprot drugoj (npr. djevojčice i dječaci ako ih je podjednak broj, ali mogu sudjelovati i miješane skupine). Predstavnik vrste naizmjenično je postavljao zadatke riječima. Tko je u dvoboju prvi izračunao zadatak i glasno rekao točno rješenje uzeo je igrača iz suprotne vrste u svoju vrstu. Ako je izgovorio netočno rješenje, prelazio je u drugu vrstu. Igra je završila kada je jedna vrsta preotela sve igrače drugoj vrsti (ako je manji broj učenika u razredu) ili je pobijedila ekipa u kojoj je na kraju igre bio veći broj učenika. Učenici su čitali zadatke napisane na karticama (<https://youtu.be/wqIRoPLUeS0?t=994>). Matematički dvoboj učenicima se svidio što se moglo vidjeti po osmjesima na njihovim licima (slika 59) zbog čega smo tu aktivnost još jednom ponovili. Ovom igrom htjela sam među učenicima potaknuti natjecateljski duh i suradnju što smatram da sam na kraju i uspjela ostvariti. Uočila sam da se natjecanje može koristiti na zdrav način kako bi se učenike motiviralo na učenje.



Slika 59. Igra „Matematički dvoboj“

Učenice trećeg razreda suradnju su vježbale u igri „Tko će prije do 1000“ (Vlahović-Štetić i Vizek Vidović, 1998). Svaka učenica dobila je tri seta po 20 kockica različitih boja za označavanje jedinica, druga desetice i treće stotice, podlogu s mjesnim vrijednostima i papir za računanje. Dobile su i papirnate vrećice s karticama brojeva od 1 do 100 (izrezala sam ih od tvrdog papira i napisala sam na svaku po jedan broj od 1 do 100). Vrećica s karticama nalazila se na sredini stola.



Slika 60. Igra „Tko će prije do 1000“

Učenice su naizmjenično izvlačile kartice, pročitale broj i stavile odgovarajući broj kockica na svoju podlogu s mjesnim vrijednostima. Izvučene kartice vraćale su u vrećicu. Pobjednica je bila ona učenica koja je prva postigla 1000 ili više (<https://youtu.be/ig9FM51Dqrc?t=1065>). Učenice su pokazale veliko zanimanje za igru tražeći da ju igraju i na sljedećim satima matematike (slika 60). Komentar kritičke prijateljice u vezi sa suradničkom igrom „Tko će prije do 1000“ bio je sljedeći:

Zanimljiva je *igra* Tko će prije do 1000?. Vidi se da se svidjela učenicima čim su pitali mogu li se igrati i pod odmorom. U svom istraživačkom dnevniku navela si kako si se previše uključila u navedenu igru pomažući jednoj učenici te kako si kasnije shvatila da to ipak nisi trebala učiniti, odnosno trebala si pustiti učenicu da sama pokuša riješiti poteškoću koju ima ili zamoliti nekog da joj pomogne. Time bi učenicima zapravo omogućila pozitivnu međuovisnost i ujedno pojačala njihovu interakciju. Pohvalno je što si to primijetila, čime zapravo pokazuješ da si spremna učiti za dobrobit učenika. Općenito govoreći, o važnosti učenja putem igre, Bognar (1986, 81) piše sljedeće: „Kada govorimo o odnosu igre i učenja, misli se ponajprije na efikasnost igre u usvajanju znanja, te na trajnost znanja. Učenje putem igre podjednako je efikasno kao i učenje pomoću nastavnih listića. Znanja stečena igrom trajnija su od znanja stečenih radom na radnim listićima.“ (I. Šustek, osobna komunikacija, 28. studenoga 2021.)

5.4. Analiza i interpretacija intervjua s učenicima i anketnih upitnika provedenih s učenicima i roditeljima

U akcijskim istraživanjima intervju je najčešće adekvatan i brz način dobivanja povratnih informacija o promjenama koje su ostvarene u odgojno-obrazovnom procesu, ali i o utjecaju koji imaju na ispitanike. Za intervjuiranje učenika koristila sam tri puta *grupni standardizirani intervju s pitanjima otvorenog tipa* i *jedan individualni standardizirani intervju* nakon održane nastave matematike. Grupni intervju proveden je s učenicama trećeg razreda 18. listopada 2021. godine, s učenicima drugog razreda 10. prosinca 2021. godine, a s učenicima obaju razreda 29. studenog 2021. godine. Individualni intervju provela sam s učenicom trećeg razreda 23. prosinca 2021. godine. Odgovori učenika dali su mi uvid u promjene koje su se dogodile na nastavi te o njihovu zadovoljstvu nastavom matematike. Osim toga, saznala sam kako su učenici procijenili svoju aktivnost i samostalnost na nastavi. Prije početka intervjua svakom je učeniku još jednom objašnjen razlog zbog kojeg se provodi te način na koji će biti ostvaren. Učenici su imali na raspolaganju onoliko vremena koliko im je za to bilo potrebno.

Prvi intervju održan je 18. listopada s učenicama trećeg razreda Ž. B i E. F. (<https://youtu.be/Gdy1t1MGrZ0>). Učenice su rekle da su rado sudjelovale u akcijskom istraživanju jer ih je to zanimalo te da su prihvatile promjene u nastavi. Komentirale su kako im je prošlogodišnja nastava matematike bila dosadna i kako se više nisu željele služiti samo

udžbeničkim kompletom. Istakle su kako se ranije nisu služile tabletima „osim ako je u pitanju bilo neko natjecanje iz matematike“ (učenica E. F., osobna komunikacija, 18. listopada 2021.).

Na pitanje zašto im se prijašnja nastava matematike nije sviđjala učenice E. F. i Ž. B. odgovorile su sljedeće:

Učenica E. F.: Zato što smo samo rješavali radnu (bilježnicu), išli smo pred ploču, ali sad ne idemo više samo pred ploču, rješavamo zadatke u udžbeniku zato što imamo konkretni materijal. Dosadno nam je bilo stalno rješavati udžbenik.

Učiteljica E. F.: Kakva vam je ove godine matematika?

Učenica E. F.: Zabavnija.

Učiteljica: Zašto vam je zabavnija?

Učenica E. F.: Zato što si možemo predočiti brojeve koje ne znamo.

Učiteljica: Dobro, recite mi što se tiče rješavanja problemskih zadataka, jeste li se prije susretale s njima?

Učenice (u isti glas): Ne.

Učiteljica: Niste. A ove godine?

Učenice (u isti glas): Da.

Učiteljica: Često ih rješavate?

Učenice (u isti glas): Da.

Učiteljica: Kako vam se sviđa ta vrsta zadataka?

Učenica E. F.: Zabavno.

Učiteljica: Zašto?

Učenica E. F.: Zato što tu moramo uključiti mozak i misliti. (učenice Ž. B. i E. F., osobna komunikacija, 18. listopada 2021.)

Dakle, učenice su istakle korištenje konkretnog materijala na nastavi te su se izjasnile kako ga žele i ubuduće koristiti. Osim toga navele su da su ove godine više rješavale problemske zadatke koji su im zabavni jer ih potiču na razmišljanje. Prateći ponašanje učenica na nastavi uočila sam da su veselije, više uživaju u nastavi i bolje razumiju ono što uče.

Drugi intervju održala sam 5. prosinca s učenicima drugog i trećeg razreda M. J., D. S. i E. F. u trajanju od 4 minute. Kao što je vidljivo iz odgovora učenici su prepoznali promjene koje su se događale na matematici ove školske godine i ističu da su rado sudjelovali u takvoj nastavi. Ono što su uočili i na što stavljaju posebni naglasak jest konkretni materijal, služenje tehnologijom kao i korištenje igre u nastavi. Osim toga zadovoljniji su ovim načinom učenja jer mogu više naučiti.

Treći intervju održala sam 9. prosinca s učenicom drugog razreda L. S. i učenicom trećeg razreda J. S. Učenici su istaknuli promjene koje su prisutne na nastavi ove školske godine, a

nastava im je zabavnija. Poseban naglasak stavljaju na rješavanje problemskih zadataka, služenje tehnologijom te ističu igre u nastavi kao što su slagalica i matematički nogomet. Uspoređujući prošlogodišnju nastavu matematike zaključuju kako im sadašnji način rada više odgovara. Posebno ih veseli sudjelovanje u igri „Trgovina matematičkim novcem“ koju je samostalno osmislila učenica E. F. Ona je ponosna na sebe što je osmislila tu igru u nastojanju da učini nastavu matematike zabavnijom (<https://youtu.be/fBoOXIje8Mo>). Bognar (1993, str. 199) navodi da se igre s pravilima dijele na „na strategijske igre (igre analogne mlinu, šahu) i igre na sreću (analogne igri čovječe ne ljuti se, kartama). Strategijske igre igraju se prema odluci sudionika, a igre na sreću prema bacanju kocke, okretanju vrtuljka, izvlačenju kartice i sl. Ima igara u kojima su spojena oba tipa igara s pravilima.“ U ovom slučaju učenica E. F. osmislila je igru s pravilima koja je potakla ostale učenike na aktivnost u nastavi matematike (<https://youtu.be/L5GC5vXGaew>).

U razgovoru s učenicama trećeg razreda uspjela sam saznati niz detalja koji su mi pomogli bolje shvatiti kako učenici doživljavaju sudjelovanje u istraživanju. Iz provedenih intervjua saznala sam više o njihovu zadovoljstvu nastavom matematike. Učenice trećeg razreda naglasile su važnost ostvarenih promjena u nastavi matematike te su prepoznale aktivnosti koje prije nisu bile prisutne. Naime, ostvarivanje suštinskih promjena u nastavi matematike planirala sam postići koristeći se rezultatima relevantnih istraživanja koje sam povezala s akcijskim istraživanjem. Prema Bognaru (2008) suštinske promjene i proces promjena ne podrazumijevaju uvođenje nekoliko suvremenih nastavnih metoda ili nastavnih strategija, nego im je cilj ostvariti promjene u načinu razmišljanja učenika, ali i ostalih sudionika nastavnog procesa. Da je to tako, dokazuju i odgovori učenika koji su promjene uočili i istaknuli ih:

Učiteljica E. F.: Kakva vam je ove godine matematika?

Učenica E. F.: Zabavnija.

Učiteljica: Zašto vam je zabavnija?

Učenica E. F.: Zato što si možemo predočiti brojeve koje ne znamo.

Učiteljica: Dobro, recite mi što se tiče rješavanja problemskih zadataka, jeste li se prije susretale s njima?

Učenice (u isti glas): Ne.

Učiteljica: Niste. A ove godine?

Učenice (u isti glas): Da.

Učiteljica: Često ih rješavate?

Učenice (u isti glas): Da.

Intervju mi je pomogao saznati jesu li promjene u nastavi matematike zaista ostvarene. Učenici su u intervjuima uočili promjene, a kao primjer naveli su rješavanje problemskih zadataka koje su rado rješavali. Dakle, u intervjuima je utvrđeno da učenici kao najvažniju promjenu prepoznaju rješavanje problemskih zadataka. Važno je i naglasiti kako se kroz rješavanje problemskih zadataka razvijalo i njihovo matematičko mišljenje, stvarali su trajno znanje, razvijali kreativnost te su bili aktivni na nastavi matematike. Selmer i Kale (2013) ističu da postoji sve veći broj dokaza o korisnosti problemskog učenja u odgovarajućim uvjetima. Ono može povećati angažman učenika (Bernt i sur., 2005), autonomiju (Worthy, 2000), razvoj vještina 21. stoljeća (Ravitz i sur., 2011), refleksivna iskustva (Grant i Branch, 2005), te postignuća na standardiziranim testovima (Geier i sur., 2008). Selmer i Kale (2013) smatraju kako bi učitelji trebali postići da učenicima matematika bude zanimljiva. Zadatak je učitelja matematike stvoriti povoljno i produktivno okruženje za učenje jer se učenje teško može odvijati u nedovoljno motivirajućim uvjetima. Matematika treba biti predstavljena na način koji zadovoljava stilove učenja i različite mogućnosti učenika.

U intervjuima učenici naglašavaju mogućnost korištenja konkretnog materijala na nastavi matematike. Boggan i sur. (2010) smatraju da učitelji koji koriste konkretni materijal u nastavi matematike mogu pozitivno utjecati na učenje učenika. Učenici svih uzrasta i svih sposobnosti mogu imati koristi od konkretnog materijala, jer im pomažu kako bi matematičke sadržaje usvojili s lakoćom i na smislen način. Istraživanja pokazuju da se najvažnije učenje događa kada učenici samostalno i aktivno konstruiraju vlastito matematičko razumijevanje u čemu im može pomoći uporaba konkretnog materijala. Carbonneau i sur. (2013) proveli su sustavni pregled literature u kojem su željeli ispitati učinak korištenja konkretnog materijala u poučavanju matematičkih sadržaja u odnosu na nastavu na kojoj se primjenjuju apstraktni simboli. Rezultati su pokazali male do umjerene veličine učinka u usporedbi s nastavom na kojoj su se koristili matematički simboli tijekom poučavanja.

U ovom akcijskom istraživanju nastojala sam učenicima pomoći bolje shvatiti matematičke sadržaje korištenjem Stern blokova. Nije dovoljno u glavi samo stvoriti sliku nekog pojma već ga treba vizualizirati u odnosu na druge pojmove. Tome pridonose aktivnosti u kojima učenici manipulacijom konkretnih materijala dolaze do razumijevanja matematičkih koncepata i procedura. Učenici upotrebom konkretnog materijala trebaju povezati konkretno i apstraktno (Glasnović Gracin i Jerec, 2012). Namjera mi je bila naviknuti učenike na korištenje konkretnog materijala na nastavi pri rješavanju matematičkih zadataka. Glasnović Gracin i Jerec (2012, str. 13) smatraju da se „materijalima poput raznih didaktičkih žetona, Stern blokova i predmeta iz

svakodnevice koji predstavljaju elemente skupa (npr. voća, kocaka, kamenčića, graha, zrna kukuruza itd.)“ učenici trebaju služiti kako bi učenje bilo uspješnije. Uspješnost učenja ogleda se u postizanju boljeg uspjeha, produljenom pamćenju, dubljem razumijevanju i kritičkom mišljenju. Larbi i Mavis (2016) smatraju da učenici najbolje uče kada su aktivni sudionici u procesu učenja. Oni asimiliraju znanje kada im se pruži prilika istraživati, bilježiti, dijeliti i razgovarati o otkrićima. Korištenjem konkretnog materijala pobuđuje se zanimanje učenika i promiče aktivno sudjelovanje u nastavi. Istraživanje koje su proveli Larbi i Mavis (2016) pokazalo je da je većina učenika koje su učitelji poučavali algebarskim pločicama navela da su im pločice stvorile mentalne slike u glavi koje su im olakšavale učenje. Važno je da učitelji koriste odgovarajuće i dostupne konkretne materijale koji pospješuju formiranje koncepata. Korištenje algebarskih pločica pokazalo se učinkovitim jer je učenicima pomoglo u izgrađivanju znanja osnovnih matematičkih operacija.

Nadalje, iz odgovora učenika u intervjuima saznala sam i da je korištenje tehnologije kod njih izazivalo zadovoljstvo. Prema Brown i sur. (2004) uporaba IKT-a u nastavi matematike doprinosi učenju. Ključno je pitanje kako integrirati IKT alate u nastavu. U ovom istraživanju tehnologiju sam povezala s drugim značajkama učinkovite nastave (npr. davanje povratnih informacija ili rješavanje problema) čime je njezina učinkovitost mogla doći do izražaja.

Osim intervjua provela sam i anketu na kraju istraživanja koja se sastojala od pitanja otvorenog i zatvorenog tipa. U pitanjima zatvorenog tipa učenici su trebali procijeniti na skali od 1 do 5 koliko im se sviđa učenje u skupinama, uče li sada matematiku kod kuće više nego prošle školske godine te koliko su aktivni na satu matematike. U pitanjima otvorenog tipa cilj mi je bio otkriti što im se sviđa, a što ne sviđa na nastavi matematike. Osim toga, zanimali su me i njihovi prijedlozi za unapređenje nastave matematike. Anketu su ispunili svi učenici obaju razreda.

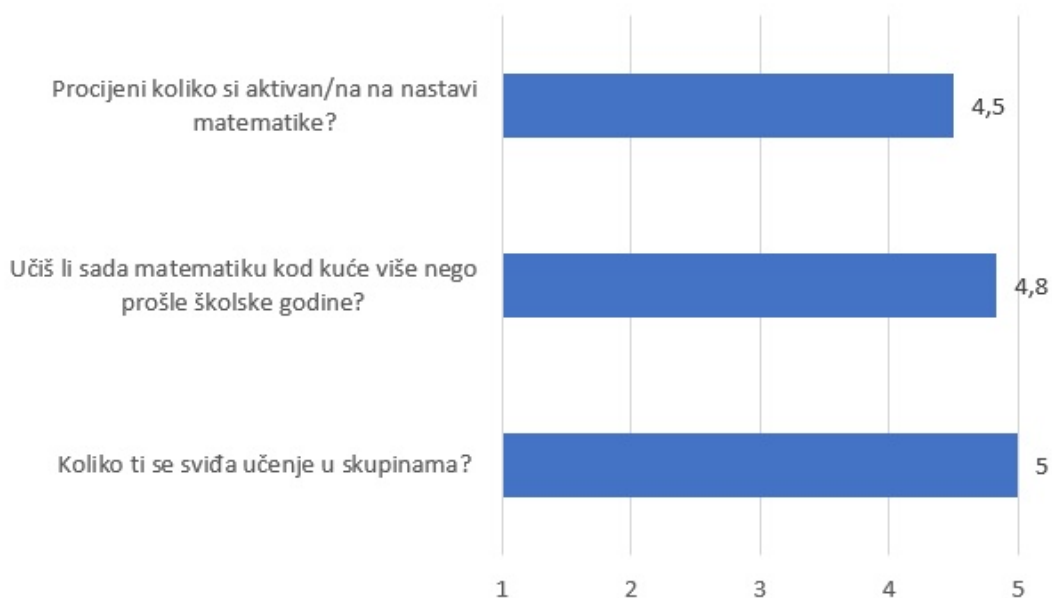
Svi učenici smatraju da im je nakon provedenog istraživanja matematika zanimljiva. Osim toga, svi su se učenici na nastavi matematike osjećali ugodno, što sam utvrdila i promatrajući ih na nastavi matematike. U intervjuu nakon istraživanja otkrila sam da im je matematika zanimljiva zbog problemskih zadataka, interaktivnih igara i primjenjivosti matematike u svakodnevnom životu.

Nastavni susreti privedeni su kraju provedbom evaluacije. Bognar i Matijević (1993, str. 157) navode kako je završna etapa nastavnog procesa evaluacija. Ona se ne može svesti samo na provjeravanje i ocjenjivanje onoga što su učenici naučili, već uključuje „zajedničko vrednovanje odgojno-obrazovnog procesa od njegovih sudionika“. Kako bi se to postiglo

učenicima su podijeljeni evaluacijski listići. Učenicima sam čitala pitanja, a oni su zapisivali svoje odgovore u listić. Time je postignuto da i lošiji čitači mogu razumjeti pitanja i dati svoje odgovore.

Isto tako nakon provedenog istraživanja svi su učenici odgovorili da na nastavi više ne rješavaju zadatke iz udžbenika i radne bilježnice. Bez obzira na to što je korištenje udžbeničkog kompleta u našim školama i dalje iznimno zastupljeno, uloga učitelja koji je posrednik između teksta i učenika vrlo je važna (Glasnović Gracin i Domović, 2009). Naime, učitelj je taj koji određuje kako će nastava biti strukturirana i hoće li se, kako i koliko udžbenički komplet koristiti. Pri tome treba voditi računa da do izražaja dođu elementi učinkovite nastave matematike.

Nadalje, na tvrdnju koja se odnosila na socijalne oblike nastave, svi su učenici odgovorili kako sada na nastavi matematike uče u skupinama ili u paru. Bognar i Matijević (2005) smatraju da su strategije, metode i postupci važni aspekti odgojno-obrazovnog procesa. Za učenje u skupinama ključna je interakcija tako da učenici i sami uoče da su njihovi ciljevi zajednički. Osim toga, u učenju u skupinama učenici su aktivno uključeni u nastavni proces, međusobno si pomažu, traže najbolja rješenja za zadatke i stvaraju kompromise. Prema istraživanju koje provodi Hattie suradničko nasuprot individualnom učenju ima efekt učinka 0,55 (<https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement>) što ukazuje na učinkovitost tog oblika nastave. To znači da bi učitelji trebali češće primjenjivati suradničko učenje.



Slika 61. Procjena učenika o učenju matematike

U sljedećim pitanjima u upitniku od učenika se očekivalo da procijene svoje odgovore na Likertovoj skali od 1 do 5 (slika 61). Učenici su svoju aktivnost na nastavi procijenili visokom ocjenom od 4,5. Isto tako, procijenili su da uče matematiku kod kuće više nego prošle godine (4,8) te da im se učenje u skupinama sviđalo (5).

Posljednje pitanje bilo je otvorenog tipa. U njemu su učenici trebali napisati što im se sviđa i ne sviđa na nastavi matematike te što predlažu kako bi nastava matematike bila bolja. Ovo su neki od odgovora:

Sviđa mi se kada na nastavi matematike rješavamo problemske zadatke.
 Meni se najviše sviđa kada rješavamo zadatke na tabletu.
 Meni se sviđa kada se natječemo i igramo igre.
 Sviđa mi se kada učiteljica sama osmisli zadatke i onda te zadatke rješavamo.

Ne bih ništa mijenjao.
 Ne sviđa mi se rješavanje zadataka u radnoj bilježnici.

Volio bih se još više služiti konkretnim materijalom na nastavi.
 Volio bih više rješavati matematičke zadatke na ploči.
 Voljela bih više rješavati zadatke i kvizove na tabletu.

(Učenici, osobna komunikacija, 10. siječnja 2022.)



Slika 62. Procjena roditelja o učenju matematičkih sadržaja

Nakon završenog istraživanja anketu sam provela i s roditeljima. Rezultati inicijalne ankete pokazali su da čak pet od šest roditelja smatra da njihova djeca nisu dovoljno motivirana za učenje nastavnih sadržaja iz matematike. Rezultati završne ankete pokazali su da roditelji sada

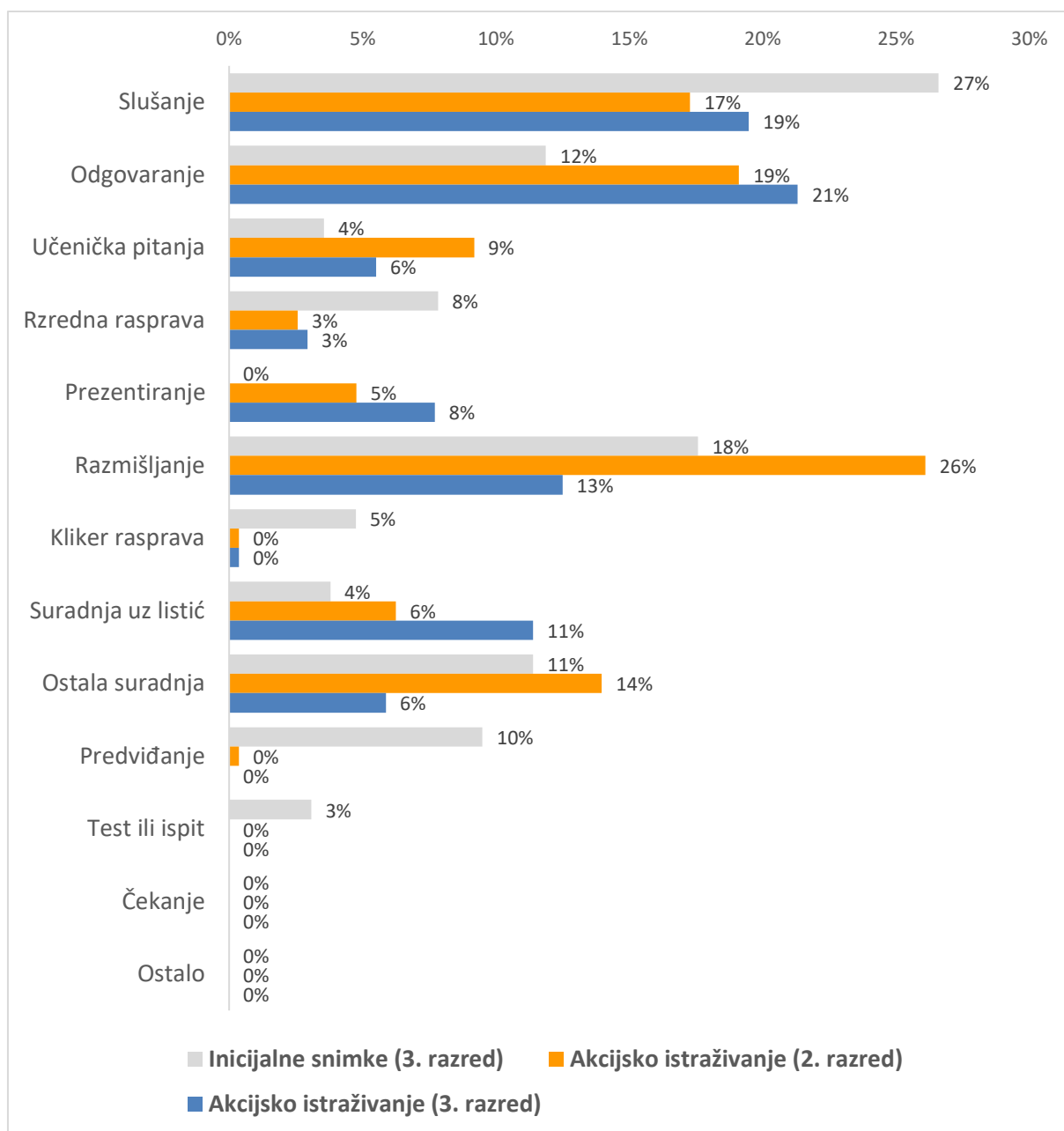
prosječnom ocjenom od 4,5 procjenjuju samostalnost, aktivnost te motiviranost djece tijekom učenja matematičkih sadržaja te ističu napredak u rezultatima svoje djece. Osim toga, roditelji prosječnom ocjenom od 4,7 procjenjuju napredak u učenju učenika u nastavi matematike, a istom ocjenom procjenjuju i učenje matematičkih sadržaja (slika 62).

Rezultati inicijalnog anketnog upitnika provedenog s roditeljima pokazali su da je većina roditelja smatrala kako njihova djeca ne napreduju na nastavi matematike. Osim toga, roditelji su smatrali da njihova djeca nisu motivirana za učenje matematike te da su pokazali nezainteresiranost u učenju matematičkih sadržaja. Rezultati završne ankete provedene s roditeljima govore kako roditelji sada smatraju da su polazne vrijednosti unaprijeđene, te da su promjene u nastavu matematike uvedene.

5.5. Rezultati COPUS analize inicijalnih videozapisa i videozapisa nastave tijekom akcijskog istraživanja

Da su promjene u nastavi matematike bile potrebne ukazuju nam rezultati analize pet snimki nastave matematike održane u travnju, svibnju i lipnju 2019. godine u trećem razredu koja je provedena pomoću COPUS protokola (Smith i sur., 2013). Analizirajući nastavu matematike utvrdila sam da su učenici uglavnom slušali moja izlaganja, individualno su rješavali zadatke i odgovarali su na pitanja. Nedostajalo je učeničko postavljanje pitanja, rasprava i iznošenje mišljenja. Nastavu sam pretežito izlagala, davala sam učenicima povratne informacije te sam se kretala po razredu pomažući im u rješavanju zadataka.

Kako bih napravila usporedbu inicijalne i nastave ostvarene za vrijeme akcijskog istraživanja provedena je COPUS analiza nastave održane u prvom obrazovnom razdoblju 2021./2022. školske godine. COPUS analiza ostvarena je na pet videozapisa nastave održane u drugom razrednom odjelu i pet videozapisa nastave u trećem razrednom odjelu za vrijeme akcijskog istraživanja (slika 63).



Slika 63. Analiza učeničke aktivnosti na inicijalnim snimkama i u akcijskom istraživanju

Iz grafičkog prikaza rezultata COPUS analize (slika 63) moguće je uočiti promjene u učeničkoj aktivnosti na nastavi matematike. Na inicijalnoj snimci nastave matematike 27 % vremena učenici su slušali izlaganja nastavnih sadržaja, dok su za vrijeme akcijskog istraživanja učenici drugog razreda to činili 17 %, a učenici trećeg razreda 19 % vremena. Na snimkama nastave iz 2019. godine učenici su 12 % vremena odgovarali na pitanja, dok su u akcijskom istraživanju učenici drugog razreda to činili 19 %, a u trećem razredu čak 21 % vremena. Nadalje, na inicijalnim snimkama utrošila sam samo 4 % vremena na postavljanje pitanja

učenika, dok su u akcijskom istraživanju učenici drugog razreda postavljali pitanja 9 % vremena, a treći razred to je činio 6 % vremena. Premda su učenici trećeg razreda na inicijalnoj snimci nastave bili vrlo aktivni i zainteresirani, čini se kako je njihov misaoni angažman u rješavanju matematičkih zadataka bio nešto slabije zastupljen. Analizom videozapisa nastave utvrdila sam kako sam za matematičke aktivnosti i misaoni angažman odvojila oko 18 % vremena na inicijalnim snimkama, dok je za vrijeme akcijskog istraživanja drugi razred angažiran u rasponu od 26 % vremena, a treći razred 13 %. Nadalje, učenici su uz listić surađivali 4 % vremena na inicijalnoj snimci, dok su u akcijskom istraživanju to činili 6 % u drugom i 12 % vremena u trećem razredu. Analizom videozapisa nastave utvrdila sam kako sam za ostale oblike suradnje odvojila 11 % vremena, a u akcijskom istraživanju 14 % u drugom razredu i 6 % u trećem razredu. Na samostalnu aktivnost učenika drugog razreda otpada 26 % svih kategorija, a trećeg razreda 40 %. Ako se tu pribroje i učenički odgovori, onda to iznosi visokih 68 % za drugi razred i 64 % za treći razred.

Osim toga, utvrdila sam da sam za matematičke aktivnosti koje promiču *zaključivanje i rješavanje problema, suradničko učenje i upotrebu tehnologije* odvojila oko 40 % vremena. Nadalje, COPUS analiza videozapisa ukazala mi je da su na satima matematike za vrijeme akcijskog istraživanja prevladavale suradničke aktivnosti pod vodstvom učitelja i samostalna aktivnost učenika.

Kako bi se ostvarile suradničke matematičke aktivnosti pokušala sam poticati učenike da s drugim učenicima razgovaraju o matematičkim sadržajima, potiču jedni druge na rješavanje zadataka međusobno si pružajući pomoć. Naime, nekoliko istraživanja ukazuje na to da učitelji imaju poteškoća u provedbi suradničkog učenja s učenicima mlađe školske dobi (Veldman, i sur., 2020). Učitelji imaju problema s raspodjelom vremena i poteškoća s pripremom učenika za takav oblik učenja (Gillies i Boyle, 2010). Osim toga, većina učitelja nije osposobljena za primjenjivanje suradničkog učenja u svakodnevnoj nastavi (Blatchford i sur., 2006; Kutnick i sur., 2002). Provedba suradničkog učenja može biti osobito izazovna za učenike nižih razreda jer zahtijeva veći angažman učitelja tijekom njegove provedbe u učionici (Battistich i Watson, 2003). Upravo zato bila sam angažiranija u vođenju učenika drugog razreda, a manje sam to činila s učenicima trećeg razreda. Na snimkama nastave ostvarene za vrijeme akcijskog istraživanja učenicima sam omogućila suradničko sudjelovanje u praktičnim aktivnostima što im se sviđalo i u čemu su vrlo aktivno sudjelovali. Praktične aktivnosti u kojima učenici nešto izrezuju ili trebaju načiniti rukama važne su posebno za suvremenu djecu koja sve više vremena provode za računalima i mobilnim uređajima. U naprednim školskim sustavima kakav je finski,

nastoji se postići ravnoteža između kognitivnog, afektivnog i psihomotoričkog područja. Zbog toga učenici u Finskoj sudjeluju u različitim praktičnim aktivnostima što je moguće vidjeti i na sljedećem videozapisu: <https://www.youtube.com/watch?v=6aN3X1ZDqf4>. U razredu sam uspjela uspostaviti ravnotežu između ta tri područja.

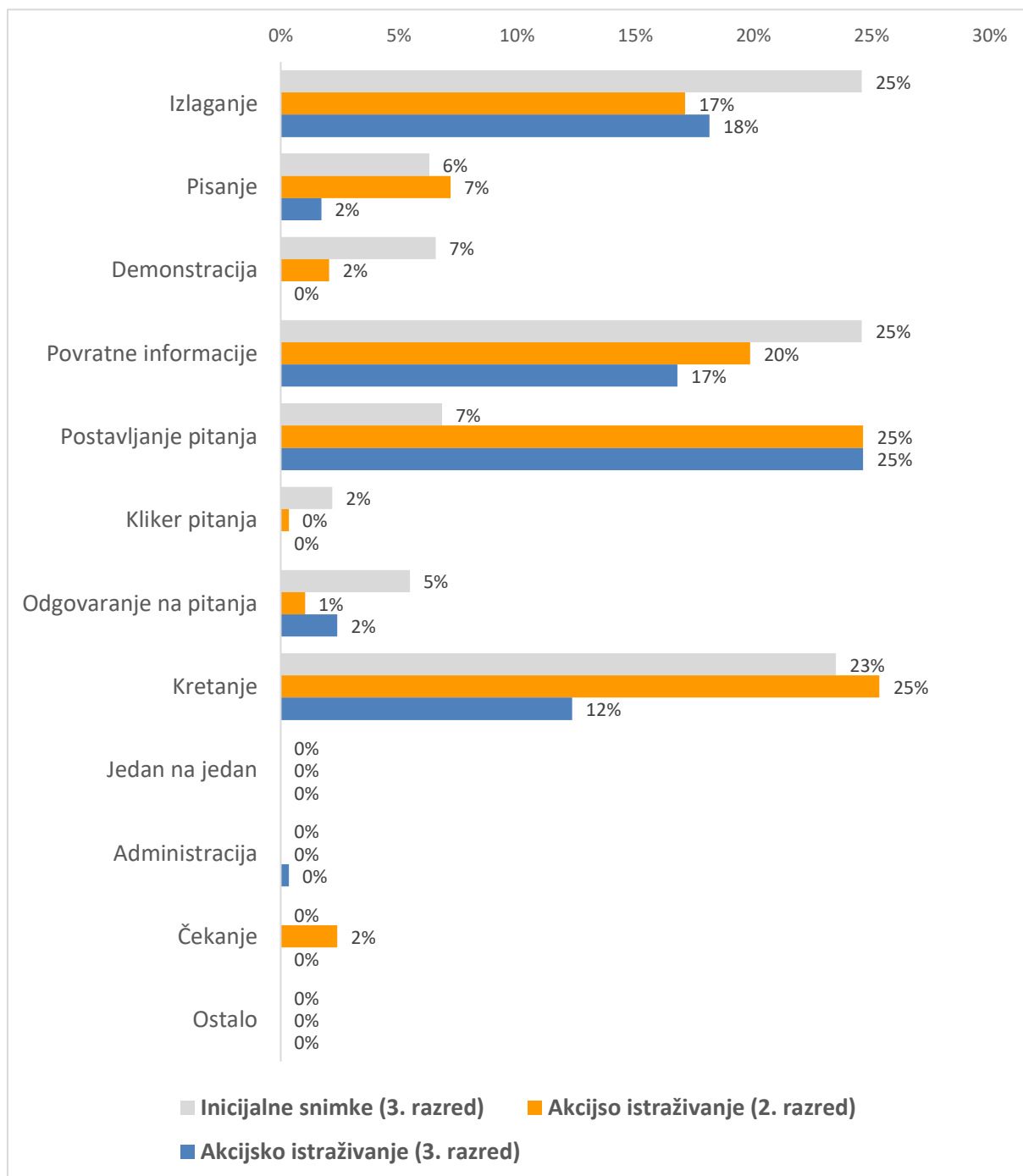
Usporedbom COPUS analize pet inicijalnih snimki iz 2019. godine i pet videozapisa nastave održane u drugom razrednom odjelu kao i pet videozapisa nastave u trećem razrednom odjelu za vrijeme akcijskog istraživanja došla sam do važnih zaključaka. Razlike u rezultatima i utrošenom vremenu na nastavi govore da je nastava za vrijeme akcijskog istraživanja usmjerenija na učenika za razliku od nastave na inicijalnim snimkama u kojima prevladavaju značajke tradicionalne nastave. Učenicima je omogućeno *aktivno učenje* povezujući problemski pristup s njihovom prirodnom radoznalošću i istraživačkim duhom.

Naime, uspoređujući snimke iz 2019. i 2021. godine vidjelo se da su učenici aktivnije učili, a bili su i više zainteresirani za nastavu jer su u intervjuima nakon istraživanja otkrili da im je matematika zanimljiva zbog problemskih zadataka, interaktivnih igara i primjenjivosti matematike u svakodnevnom životu. *Interes u učenju* ima ključnu ulogu, o čemu je Dewey (1913) svojevremeno pisao i za što se zalagao. U skladu s tim, potrebno je neprestano poticati interes različitim nastavnim aktivnostima.

Na slici 60 moguće je uočiti da su učenici postavljali manje pitanja nego za vrijeme akcijskog istraživanja. Kada učenici postavljaju pitanja to je znak da im predznanje nije dovoljno za rješavanje određenog problema. Osoba koja ima ključnu ulogu u podupiranju i poticanju učenika na postavljanje pitanja je učitelj (Gillies i Boyle, 2010).

Na snimkama je vidljivo da su učenici imali zadatke samovrednovanja i vršnjačkog vrednovanja. Kvalitetno je samovrednovanje vrlo važno jer predstavlja preduvjet za kvalitetno učenje. Isto je tako i kvalitetno vršnjačko vrjednovanje izuzetno važno jer omogućuje razvijanje pozitivne kritičnosti i samokritičnosti kao i povratnu informaciju o vlastitoj uspješnosti od strane vršnjaka, a ne samo od učitelja. Naime, Double i sur. (2019) proveli su metaanalizu eksperimentalnih i kvaziekperimentalnih studija koje su ispitivale učinak vršnjačke procjene na akademski uspjeh kod učenika osnovnih, srednjih ili visokih škola u različitim predmetima i domenama. Rezultati sugeriraju da vršnjačka procjena poboljšava akademski uspjeh u usporedbi s brojčanim ocjenama i procjenom nastavnika. Važno je znati kako i jedno i drugo vrednovanje trebaju imati jasne sastavnice kao i jasne kriterije, a koje bi učitelj trebao odrediti zajedno s učenicima jer će im na taj način omogućiti bolje razumijevanje ocjene kao i lakše ostvarivanje ishoda.

Osim analize učeničkih aktivnosti provedena je i analiza aktivnosti učiteljice na pet inicijalnih snimki nastave matematike održane u travnju, svibnju i lipnju 2019. godine u trećem razredu te analiza snimki aktivnosti učiteljice tijekom akcijskog istraživanja u drugom i trećem razredu koja je provedena pomoću COPUS protokola 2021. godine (slika 64).



Slika 64. Analiza aktivnosti učitelja na inicijalnim snimkama i u akcijskom istraživanju

Analizirajući inicijalne snimke nastave matematike utvrdila sam da sam pretežito izlagala nastavne sadržaje, davala sam učenicima povratne informacije te sam se kretala po razredu pomažući učenicima u rješavanju zadataka. Na snimkama nastave ostvarene za vrijeme akcijskog istraživanja uočila sam da sam na inicijalnim snimkama izlagala nastavne sadržaje 25 % vremena, a na snimkama nastave akcijskog istraživanja za to sam odvajala 17 % vremena u drugom, i 18 % vremena u trećem razredu. Na inicijalnim snimkama 6 % vremena odvajala sam za pisanje na ploči, dok sam za vrijeme istraživanja to činila 7 % u drugom, i 2 % u trećem razredu. Nadalje, na inicijalnim snimkama 25 % od sveukupne nastave utrošila sam na pružanje povratnih informacija učenicima, dok sam u akcijskom istraživanju u drugom razredu to činila 20 % u drugom i 17 % u trećem razredu. Naime, kod pružanja povratnih informacija učenicima potrebno je biti pažljiv te treba uvijek imati na umu kako su iste namijenjene nadogradnji njihova učenja. Učinkovita povratna informacija ne znači misliti umjesto učenika. Ako učitelj učenicima pruža previše smjernica, učenici neće imati potrebu samostalno razmišljati te tako neće moći postići dublje razumijevanje. Povratna informacija znači ograničiti se na davanje smjernica na čijim temeljima učenik može i treba djelovati.

Hattie i Timperley (2007) razlikuju povratne informacije koje se odnose na zadatak, postupak, razinu samoregulacije i razinu svijesti o sebi. Učitelji se obično usmjeravaju na povratne informacije usmjerene na zadatak, a manje na postupak te samoregulaciju. Hattie i Timperley smatraju da povratne informacije koje se odnose na svijest o sebi (npr. pohvale koje se odnose na osobnu kvalitetu) nisu učinkovite. Naime, najučinkovitija je povratna informacija ona o samoregulaciji. Samoregulacija uključuje interakciju između predanosti, kontrole i povjerenja. Obrađuje način na koji učenici prate, usmjeravaju i reguliraju radnje prema cilju učenja. Jedna je od samoregulatornih vještina samoprocjena koja je moćna u odabiru i tumačenju informacija. Postoje dva glavna aspekta samoprocjene: samoprocjena i samovođenje. Samoprocjena se odnosi na mogućnost učenika da pregledaju i evaluiraju svoje sposobnosti, stanja znanja i kognitivne strategije kroz različite procese samokontrole. Samovođenje je praćenje i reguliranje kontinuiranog ponašanja učenika kroz planiranje, ispravljanje pogrešaka i korištenje korektivnih strategija. Kada učenici posjeduju metakognitivne vještine samoprocjene, oni mogu procijeniti razinu svog razumijevanja, svoj trud, strategije koje koriste u zadacima te mišljenja drugih o svojoj izvedbi i svom napredovanju u odnosu na postavljene ciljeve i očekivanja (Hattie i Timperley, 2007). Za vrijeme akcijskog istraživanja učenici su se redovito samoprocjenjivali ispunjavajući obrasce samoprocjene. Na taj su način procjenjivali svoju razinu razumijevanja zadataka koje su

rješavali na nastavi. Kako bi se ostvarila kvalitetna samoprocjena potrebno je vrijeme, objektivnost, uočavanje vlastitih prednosti i nedostataka.

Na postavljanje pitanja učenicima na inicijalnim snimkama utrošila sam samo 7 % vremena, dok sam za vrijeme akcijskog istraživanja bila angažiranija te sam u drugom i trećem razredu za postavljanje pitanja odvojila 25 % od ukupnog vremena. Time sam učenike poticala na promišljanje. Na snimkama je vidljivo da sam učenicima postavljala jasna i konkretna pitanja čime se poticala njihova aktivnost u učenju, pružala sam im jasne *upute* tako da im je u svakom trenutku bilo jasno što trebaju činiti pri čemu sam naglasak stavljala na *razumijevanje sadržaja*, a ne na zapamćivanje pojmova.

Analizom videozapisa inicijalne nastave primjenom COPUS protokola utvrdila sam kako sam za kretanje po razredu sa svrhom pomaganja učenicima u rješavanju zadataka utrošila 23 % vremena, dok sam za vrijeme istraživanja to činila 25 % vremena u drugom i samo 12 % vremena u trećem razredu. Razlog tome moguće je tražiti u činjenici što je učenicima drugog razreda trebalo više pomoći posebno za vrijeme suradničkih aktivnosti, dok su dvije učenice trećeg razreda bile vrlo samostalne u rješavanju matematičkih zadataka.

Na snimkama je vidljivo da sam učenicima postavljala problemske zadatke koji su od učenika zahtijevali dublje promišljanje. Kako bi im se pomoglo u rješavanju zadatka uveden je pristup preuzet iz singapurskog modela. Mentor mi je u svom kritičko-prijateljskom komentaru istaknuo kako je dobro što se ta metoda pokušava uvesti već u drugom razredu.

Nadalje, omogućila sam učenicima uporabu konkretnih materijala. Glasnović Gracin (2012, 198) ističe da „konkretni materijali pomažu da se preko konkretnog modela približe, a zatim i usvoje apstraktni matematički sadržaji“. Sharma (2001) ističe kako učitelji često koriste samo jednu vrstu konkretnog materijala na svim razinama ovladavanja matematičkim pojmovima što doprinosi vezivanju učenika za taj materijal razvijajući osjećaj da bez njega više ne mogu riješiti određene zadatke. Problem nastaje i kad im se nakon nekog vremena omogući korištenje nekog drugog materijala. Učenici tada ne znaju što bi s tim drugim materijalom učinili jer su navikli zadatke rješavati s uobičajenim „starim“ materijalom. Upravo zato Glasnović Gracin (2012) naglašava važnost uporabe različitih konkretnih materijala koji uopće ne trebaju biti skupi, već ih učenici mogu i samostalno izraditi te ih tako uvijek imati uza se. Naime, u ovom akcijskom istraživanju nastojala sam učenicima pomoći bolje shvatiti matematičke sadržaje korištenjem Stern blokova i Multilink kocki. Nastojala sam učenike navikavati na korištenje različitog konkretnog materijala na nastavi pri rješavanju matematičkih zadataka kako ne bi naučili zadatke rješavati samo jednom vrstom materijala što se na kraju pokazalo učinkovitim.

6. ZAKLJUČAK

Današnje društvo suočeno je s brzim razvojem i stalnim promjenama koje zahtijevaju od pojedinca različite kompetencije kako bi mogao aktivno djelovati u različitim sferama života. Za izazove suvremenog društva potrebni su stvaralački odgovori te samostalnost i poduzetnost u rješavanju različitih životnih problema. Ovladavanje matematičkim znanjima i vještinama ima važnu ulogu u pripremanju pojedinaca za sudjelovanje u suvremenom društvu. Uloga učitelja jest usmjeravati učenika prema razvoju ključnih matematičkih kompetencija te ga osposobiti za rješavanje problemskih situacija. Osim toga, suvremena nastava matematike pred sebe stavlja izazov razvoja stvaralačkih sposobnosti učenika i zahtijeva aktivnu ulogu učenika koji stvara vlastito znanje u interakciji s okolinom. Iako istraživanja iz područja nastave matematike (Lindorff i sur., 2019; Pellegrini i sur., 2021) nastoje ispitati što bi trebalo mijenjati kako bi se unaprijedilo učenje učenika i poboljšali njihovi rezultati iz matematike nije do kraja utvrđeno koje se promjene trebaju uvesti u nastavnu praksu te koliko su učitelji spremni te promjene provesti i uspješno se nositi s njima. Sve to otežava učiteljima pripremanje za nastavu matematike, posebno ako imaju za cilj postići kvalitetno učenje učenika.

Ostvarivanje promjene treba temeljiti na znanstveno istraženim teorijskim polazištima. Zbog toga teorijski dio ovoga rada počinje predstavljanjem različitih teorijskih pristupa učenju matematike. Dunphy i sur. (2014) ističu nekoliko ključnih teorijskih pristupa koji mogu pomoći u razumijevanju učenja matematičkih sadržaja.

Bihevioristička teorija usredotočena je na poučavanje osnovnih matematičkih pojmova i postupaka prije nego rješavanja problemskih zadataka. U okviru te teorije smatra se da je učenje nastalo kao rezultat podražaja koji dolaze iz okoline (Bognar, 2016). Biheviorizam predstavlja učenje u malim koracima u najjednostavnijem mogućem obliku, zadatci su hijerarhijski povezani – od jednostavnih prema složenim. Važnu ulogu ima nagrađivanje vidljivog napretka.

Kognitivna teorija naglašava konstruktivističku prirodu ljudskog učenja i razvoja, te se fokusira na znanje za čije je konstruiranje odgovoran svaki pojedinac. U *socijalno-konstruktivističkoj teoriji* učenja matematike naglasak je stavljen na socijalnu interakciju u oblikovanju učenja. U toj teoriji osim socijalnog aspekta, ističe se važnost kulture i njezin utjecaj na učenje. Vigotski kao ključni predstavnik te teorije ističe utjecaj socijalnog i kulturalnog konteksta na dječje mišljenje te tumači da je učenje društveno i kulturalno posredovano. *Socijalno-konstruktivistička* teorija naglasak stavlja na interakciju djece s odraslima u kojoj su ona uključena u učenje matematike preko društvene i diskurzivne

aktivnosti. Vigotski tumači da razvoj viših mentalnih procesa djeteta ovisi o prisutnosti odrasle osobe i okoline koja ga okružuje (prema Kinard i Kozulin, 2008). Vigotski kao posebnost ističe bogato i poticajno okruženje koje je važno za učenje matematike (citirano u Newton i Alexander, 2015). Vigotski naglašava alate intelektualnog prilagođavanja te ističe strategije koje djeci omogućuju učinkovitije korištenje osnovnih intelektualnih funkcija. Smatra da su kognitivni razvoj i učenje operacionalizirani kroz psihološke alate. Psihološki alati najprije se pojavljuju kao vanjski simbolički alati koji su kulturno determinirani (prema Kinard i Kozulin, 2008). Kao primjer navodi vezivanje čvorova na žici kako bi se zapamtio određeni broj ili glasno ponavljanje onoga što se želi zapamtiti. *Bruner* također naglasak stavlja na socijalni i kulturalni kontekst u učenju te smatra da učenik uči na aktivan i konstruktivan način svojom uključenošću i djelovanjem (Post, 1988). On smatra da djeca trebaju samostalno graditi ili konstruirati vlastito znanje, bez nametanja vanjskih sila (Post, 1988). Dječji se koncepti u osnovi razvijaju iz izravne interakcije s okolinom. Brunerov model poučavanja temelji se na četiri ključna koncepta: struktura, spremnost, intuicija i motivacija. On ističe teoriju skela kao metodu vođenog otkrivanja u kojoj se razlikuju dvije ključne figure: učitelj i učenik. Teorija skele podrazumijeva nenametljivo vođenje procesa učenja. Vođenim otkrivanjem učenici istražuju matematičke pojmove i postupke pod nadzorom učitelja i na taj način od početne ideje dolaze do matematičkih pojmova (Newton i Alexander, 2015). *Piagetova teorija konstruktivizma* ističe da se izgradnja znanja odvija u interakciji s okolinom procesima asimilacije i prilagodbe. *Konstruktivizam* naglašava sposobnost djece da u različitim fazama razvoja te interakcijom s okolinom konstruiraju svoje znanje. Prema konstruktivističkom pristupu pri stvaranju novog znanja učenici nadograđuju trenutne mentalne strukture procesima djelovanja, refleksije i apstrakcije (Taylor, 2014).

U *konstrukcionizmu* pozornost se posvećuje individualnom učenju te se nadograđuje na *Piagetov* konstruktivizam i sociokulturalnu teoriju. U konstrukcionizmu učenici uče kroz proces stvaranja koristeći dostupne alate i sudjelujući u socijalnoj interakciji. Za razliku od Piageta koji se usredotočuje na kognitivne procese učenja, Papertov se konstrukcionizam usredotočuje na učenje kroz djelovanje naglašavajući učeničku izradu artefakata i to ponajprije uz pomoć digitalnih alata i računalnih tehnologija. Konstrukcionisti tvrde da angažman učenika u konstrukciji artefakata zahtijeva kreativnost (Parmaxi i Zaphiris, 2014). S matematičkog gledišta u današnjem digitaliziranom društvu artefakti mogu uključivati računalne programe ili baze podataka. Digitalna tehnologija omogućuje učenicima stvaranje vlastita znanja kao i pristup matematičkim idejama koje su se do tada smatrale neostvarivima (Dunphy i sur., 2014).

Društvo 21. stoljeća zahtijeva od svojih članova da budu sposobni komunicirati, surađivati, koristiti tehnologiju, pronalaziti, analizirati i sintetizirati informacije, kritički misliti, rješavati probleme, preuzimati inicijativu, donositi odluke, primjenjivati naučeno u svakodnevnom životu i radu te stvaralački djelovati (Larson i Miller, 2011; Joynes i sur., 2019). Zbog toga se obrazovanje treba mijenjati kako bi pružilo učenicima nove kompetencije koje su im potrebne u suvremenom svijetu (Voogt i sur., 2013). Dakle, današnji učitelji trebaju pripremiti učenike za ekonomske i socijalne promjene koje se događaju brže nego ikada, za poslove s kojima još nisu upoznati, za uporabu budućih tehnologija i za rješavanje nepoznatih socijalnih problema (Schleicher, 2016). To podrazumijeva potrebu uvođenja promjena u nastavi svih predmeta, a time i matematike.

Fullan (2007) te Milles i sur. (1987) tumače da se promjene događaju u tri faze: iniciranje je prva faza procesa promjena, zatim slijede faza provedbe u kojoj se uvode promjene koje se mogu vidjeti u učionicama i na kraju naglasak se stavlja na institucionalizaciju. Institucionalizacijom nova praksa postaje rutina koja se koristi u svakodnevnoj praksi (Fullan, 2007). Institucionalizacija se ne događa ako promjena nije uspješno pokrenuta i ako se ne provodi. Svaka faza ovisi o uspjehu prethodne te zahtijeva različite strategije. Bognar i Šimić (2014) smatraju „kako je procesu promjena potrebno dodati još jednu fazu, a to je diseminacija iskustava stečenih prilikom uvođenja promjena. Tome posebno mogu doprinijeti akcijska istraživanja“ (str. 14) za čije se uvođenje zalažu. Time i ova disertacija može doprinijeti diseminaciji postignutih rezultata promjena ostvarenih u specifičnom kontekstu jedne područne škole.

Hattie (2015) je ukazao na problem bavljenja promjenama koje imaju mali učinak te ih je nazvao politikom ometanja. Zbog toga je napravio rang listu učinaka (<https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement>) i istaknuo važnost posvećivanja pozornosti promjenama koje imaju efekt učinka 0,4 i veći. Te čimbenike u duhu našeg jezika možemo nazvati suštinskim promjenama.

Suštinske promjene u nastavi moguće je ostvariti primjenjivanjem učinkovitih nastavnih strategija. U uvođenju tih promjena važno je koristiti metodologiju akcijskih istraživanja kako bi unapređenja bila dostupna izvan konteksta u kojima su ostvarena. Pri tome veliku ulogu imaju učitelji koji provođenjem suštinskih promjena u svojoj praksi doprinose razvoju učeničkih kompetencija, ali i svom profesionalnom razvoju. Treba istaći da postoji mnogo faktora koji doprinose učinkovitosti škola, ali jedan od najvažnijih su kvalitetni učitelji (Hattie,

2015). Fullan (2011) smatra da mijenjanje obrazovnog sustava leži u unapređenju kompetencija učitelja te u povećanju nastavničkog znanja.

Jukić Matić i sur. (2020) smatraju važnim utvrditi čimbenike koji mogu doprinijeti unapređenju nastave matematike. Jukić Matić i sur. (2020) analizirajući relevantnu literaturu utvrdili su sljedeće značajke učinkovite nastave matematike: *određivanje matematičkih ciljeva koji vode učenju, uvažavanje učeničkog predznanja, korištenje zadataka koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, vođenje smislene matematičke rasprave, izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja, korištenje tehnologije, suradničko učenje, povratne informacije*. Pri tome treba voditi računa da kvaliteta nastave ovisi prije svega o učiteljima koji moraju biti osposobljeni za realizaciju učinkovitih nastavnih metoda. Nastava matematike učinkovita je kada na najbolji način doprinosi učenju učenika.

Hattie (2009, 2012, 2015) se u svojim radovima usmjerio na čimbenike koji mogu doprinijeti boljim rezultatima učenja učenika koji se ne odnose specifično na matematiku. Zbog toga smo se u sustavnom pregledu literature usmjerili na čimbenike koji mogu dovesti do suštinskih promjena u nastavi matematike. Gogh i sur. (2017) navode da se sustavni pregled literature odnosi na pretraživanje i odabir znanstvenih radova na temelju unaprijed postavljenih kriterija kako bi se analizirali i interpretirali rezultati već provedenih istraživanja.

U sustavni pregled uključili smo istraživanja objavljena u razdoblju od deset godina. Izabrali smo 19 istraživanja prema sljedećim kriterijima: u istraživanju su sudjelovali učenici razredne nastave, uključili smo sva eksperimentalna (randomized controlled trial – RCT) i kvaziekperimentalna istraživanja koja su usredotočena na matematička postignuća učenika razredne nastave, radove u kojima su detaljno opisani programi intervencije u nastavi matematike, a u obzir su ulazila istraživanja s najmanje dva učitelja i 30 učenika u eksperimentalnoj i kontrolnoj skupini. Studije su uključivale kvantitativne rezultate postignuća učenika iz matematike dobivene na temelju provedenog predtesta i posttesta i iz kojih je bilo moguće izračunati veličine efekta učinka ili je on već bio izračunat. Nadalje, veličina učinka trebala je biti pozitivna i statistički značajna. Intervencije su trebale trajati najmanje osam tjedana, a istraživanje je trebalo biti objavljeno od 2010. do 2019. godine. Istraživanje je moglo biti provedeno u bilo kojoj zemlji uz uvjet da je rad napisan na engleskom jeziku.

Na rezultatima izabranih istraživanja provedena je kvalitativna analiza. Kvalitativna analiza obuhvaćala je prema Miles i sur. (2014) redukciju podataka, sređivanje podataka i izvođenje zaključaka. Utvrđeno je da se u učinkovitim intervencijama najviše *koriste zadatci koji promiču zaključivanje i rješavanje problema, uvažava se učeničko predznanje i koristi se tehnologije*.

Ostale značajke učinkovite nastave matematike prema Jukić Matić i sur. (2020) *izgrađivanje proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja, suradničko učenje i povratne informacije* također su, premda u nešto manjoj mjeri, bile prisutne u izabranim istraživanjima. Zaključili smo *kako nije dostatno primjenjivati samo jednu značajku, već je potrebno uključiti i kombinirati različite značajke nastave matematike koje su se pokazale učinkovitima na temelju rezultata istraživanja*. Dakle, za vrijeme nastave važno je mijenjati načine poučavanja i učenja. Na taj način nastava se prilagođava različitim mogućnostima i interesima učenika. Povećanje učeničkih postignuća i ostvarivanje promjena u nastavi moguće je ostvariti samostalnim izgrađivanjem znanja vlastitim aktivnostima u *rješavanju problemskih zadataka koji potiču zaključivanje i primjenu naučenog u svakodnevnim situacijama*. Pri tome *problemsko učenje može biti kombinirano s uporabom informacijsko-komunikacijske tehnologije*.

Bognar (2009) navodi da su „ideju akcijskog istraživanja osmislili četrdesetih godina prošlog stoljeća Kurt Lewin i John Collier nastojeći pronaći odgovore za proturječnosti koje dotadašnja pozitivistički orijentirana znanost nije mogla, niti željela riješiti“ (str. 3). Cohen i sur. (2000, str. 227) ističu da praktičari provode akcijska istraživanja u vlastitoj praksi kako „bi im pomogla poboljšati ono što rade, uključujući i to kako rade s drugima i za njih“. Bognar (2006) smatra da je za kvalitetu akcijskog istraživanja važno sustavno planiranje i pripremanje nastavnih aktivnosti te stalna refleksija rezultata ostvarenih promjena u nastavi.

Kako bih mogla započeti svoje akcijsko istraživanje važno je bilo definirati problem istraživanja. Prvi korak u tome bio je određivanje početnog stanja. U tom nastojanju provedena je analiza snimki prethodno održane nastave matematike pomoću COPUS protokola (Smith i sur., 2013). Analizu sam ostvarila na pet nastavnih sati matematike koja su održana u travnju, svibnju i lipnju 2019. godine, u 3. razredu osnovne škole. Analizom sam utvrdila svoju dominaciju u nastavi. Učenička se aktivnost u velikoj mjeri odnosila na slušanje, a izostala su učenička pitanja, iznošenje mišljenja i razredne rasprave. Učenici su u manjoj mjeri bili samostalni i aktivni te su relativno malo surađivali. Na temelju te analize definirala sam problem svog akcijskog istraživanja u obliku akcijsko-istraživačkog pitanja: *Kako ostvariti promjene u nastavi matematike u kombiniranom odjelu drugog i trećeg razreda razredne nastave koristeći rezultate sustavnog pregleda relevantnih i recentnih istraživanja*.

U akcijskom istraživanju važnu ulogu ima reflektivni pristup koji sam ostvarila na razini samo(kritičke) refleksije i refleksije kritičkih prijatelja (Bognar, 2006). Naime, u akcijskom istraživanju učitelj je ujedno i istraživač stoga njegova refleksija može biti ograničena. Upravo su zato kritički prijatelji, koji imaju važnu ulogu u procesu ostvarivanja akcijskog istraživanja,

napravili analizu videozapisa održane nastave matematike. Costa i Kallick (1993) smatraju kako je kritički prijatelj osoba od povjerenja koja postavlja provokativna pitanja, nastoji ostvariti viđenje nastave iz drugog kuta gledanja te dati kritički uvid u djelovanje učitelja čije rezultate prati. O videozapisima održane nastave raspravljala sam s kritičkim prijateljima koji su me ujedno i savjetovali. Pri pisanju komentara kritički prijatelji vodili su se strukturom koju su iznijeli Hemmeter i sur. (2011). Riječ je o davanju *uvodnog komentara* koji uključuje pozitivne ili empatične opće konstatacije o nastavi, *pozitivnoj povratnoj informaciji* koja sadrži opis i pohvalu barem jedne dobro ostvarene nastavne situacije, *korektivnoj povratnoj informaciji* koja ukazuje na dijelove nastave koje je moguće unaprijediti, *planiranju narednih aktivnosti* koje mogu uključivati primjere nastave ili multimedijske obrazovne sadržaje te o *završnom pozitivnom komentaru ili ohrabrenju*. S obzirom na epidemiološke uvjete kritički prijatelji nisu posjećivali nastavu već su komentare pisali na temelju videozapisa nastave.

Za samokritičku refleksiju McNiff i Whitehead (2010) sugeriraju vođenje istraživačkog dnevnika. Istraživački dnevnik koristi se za vremensko praćenje slijeda događaja za vrijeme akcijskog istraživanja. Služi za refleksiju u kojoj istraživač promišlja o istraživačkoj praksi, za prikaz napredovanja tijekom istraživanja te kao izvor podataka. Tijekom akcijskog istraživanja istraživački dnevnik vodila sam nakon svakog održanog sata matematike detaljno opisujući nastavne aktivnosti. Detaljno sam opisala proces uvođenja promjena, uočene probleme i prijedloge za naredne aktivnosti. U pisanju istraživačkog dnevnika pomogli su mi i pisani komentari kritičkih prijatelja.

Akcijsko istraživanje započelo je u rujnu 2021. nakon nekoliko mjeseci planiranja aktivnosti koje sam implementirala u kombiniranom razrednom odjelu drugog i trećeg razreda područne škole u Budimcima koji je pohađalo šest učenika. Ostvarivanje i praćenje promjena u nastavi matematike završilo je krajem prosinca 2021. godine.

U akcijskom istraživanju pokušala sam odgovoriti na sljedeća istraživačka pitanja:

1. Kako ostvariti promjene u nastavi matematike utemeljene na značajkama učinkovite nastave matematike dobivenim u sustavnom pregledu literature?
2. Kako ostvariti učeničko zadovoljstvo nastavom te ih motivirati na učenje matematike?
3. Koje se promjene događaju u znanjima i stavovima učitelja koji provodi promjene?

Kako bih dobila odgovor na *prvo istraživačko pitanje* u nastavu sam nastojala uvesti aktivnosti koje pridonose značajkama učinkovite nastave (Jukić Matić i sur., 2020):

- a) *Prethodno znanje* u nastavi matematike kod učenika aktivirala sam primjenjujući grafičke organizatore kao što su npr. Vennovi dijagrami, konceptualne i umne mape. Tijekom njihove izrade bilo je važno dijelove smisleno povezati i sastaviti ih u pravilne međuodnose. Nadalje, planirala sam nastavne sadržaje koji su omogućavali nadogradnju novog znanja na učenička postojeća znanja. Prethodna znanja učenika pokušala sam aktivirati pisanjem zadanih pojmova u tablicu u koju su učenici upisivali informaciju koju znaju, informaciju koju misle da znaju i jednu informaciju koju trebaju ili bi željeli znati (Campbell, 2008).

Pri utvrđivanju i uvažavanju učeničkog predznanja ne bi se trebali usmjeriti na učenikove nedostatke, već na usvojena matematička znanja i vještine. Učinkovita nastava matematike temelji se na činjenici da učenik koristi predznanje tijekom rješavanja novih problemskih zadataka te da mu ono služi kao ključan element za razvoj novih strategija. Nadogradnjom na ono što učenici već znaju povećavaju razumijevanje matematičkih sadržaja.

- b) Aktivnosti koje doprinose *izgrađivanju proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja*: Primjenom matematičkih zadataka koji od učenika zahtijevaju veći kognitivni angažman, odnosno rješavanjem težih problemskih zadataka omogućila sam učenicima razvoj konceptualnog znanja. Proceduralno i konceptualno znanje međusobno je povezano te jedna vrsta znanja stvara preduvjete za razvoj one druge. Odnosno, razvijanje konceptualnog i proceduralnog znanja događa se uzastopno i nadopunjuje se. Hierbert i Grouws (2007) smatraju da je razvoj konceptualnog znanja moguće ostvariti ako se učenicima omogući rješavanje zahtjevnijih problemskih zadataka. Van de Walle i sur. (2020) smatraju da poticanje učenika na formiranje i objašnjavanje vlastita mišljenja i strategija rješavanja zadataka doprinosi izgrađivanju proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja. Osim toga važno je ostvariti povezanost između strategija koje koriste učenici i konvencionalnih strategija i postupaka. Razvoj proceduralnog znanja iz konceptualnog razumijevanja ostvarila sam korištenjem strategije učenja vođenim otkrivanjem. Vođenim otkrivanjem omogućila sam učenicima rješavanje problemskih zadataka u kojima su oni samostalno dolazili do rješenja te je do izražaja došla njihova samostalnost, ali uz moju pomoć.
- c) Aktivnosti koje *promiču zaključivanje i rješavanje problema*: Uporabom konkretnog materijala omogućila sam učenicima rješavanje problemskih zadataka zadanih u obliku matematičkih priča. Time sam poticala učenike na razmišljanje i zaključivanje.

Rješavanje matematičkih problema zasnovala sam na singapurskom modelu (Chang i sur., 2017; Leong i sur., 2017). Tim pristupom, odnosno konkretno-slikovno-apstraktnom metodom osigurala sam dublje razumijevanje matematičkih pojmova. Izradom skice nastojala sam pomoći učenicima razjasniti matematički problem te ih dovesti do rješenja. Posamentier i Krulik (2009) smatraju da se izradi skice treba posvetiti posebna pozornost jer nepravilan crtež može odvesti do pogrešnog zaključka ili krivog puta rješavanja zadataka. Rješavanje problemskih zadataka od učenika zahtijeva mentalni napor i opterećenje. Učenici su problemskim zadacima jačali svoje samopouzdanje, inovativnost, stvaralaštvo, kritički mislili te su se pripremali za primjenu matematike u životnim situacijama.

- d) Aktivnosti koje omogućuju *suradničko učenje*: Učenjem u manjim grupama i korištenjem igre u nastavi ostvarila sam učeničku suradnju. Učenjem u skupinama i paru ostvarila sam veći stupanj sudjelovanja učenika na nastavi matematike, potaknula sam samostalnost i aktivnost učenika te im omogućila slobodan izbor strategija rješavanja problemskih zadataka. Pri zajedničkom rješavanju zadataka učenici su komunicirali, razvijali svoje socijalne vještine te zajednički učili. Suradničkim učenjem nastava je učenicima postala zanimljivija, postali su motiviraniji za učenje te su pokazivali svoju inovativnost tijekom rješavanja problemskih zadataka. Osim toga, igrom je povećan učenički interes za učenjem matematike.
- e) Aktivnosti koje omogućuju *davanje povratnih informacija uz upotrebu tehnologije*: Za davanje povratnih informacija učenicima mogu se koristiti *online* kvizovi. Hattie (2017) smatra da kviz ili test trebaju biti informativni za učenika, dati učinkovitu povratnu informaciju ne samo o točnosti rješavanja zadatka, već i o procesu rješavanja kao i o metakognitivnim strategijama koje učenici primjenjuju. Jedna od aplikacija koju smo koristili u nastavi matematike za pravovremeno davanje povratnih informacija bila je Plickers. Ona je prikupljala i obrađivala podatke u realnom vremenu što je omogućilo formuliranje neposrednih povratnih informacija učenicima. Učeničkim samostalnim rješavanjem interaktivnih vježbi u alatima kao što su Wordwall, Learning Apps i Kahoot na računalu ili tabletu pokušala sam im olakšati učenje i motivirati ih na rješavanje zadataka. Uporabom informacijsko-komunikacijske tehnologije potaknula sam učenike na aktivno učenje te na međusobnu komunikaciju. Važno je istaći kako je tehnologiju u nastavi potrebno koristiti na primjeren način. Ako se koristi na odgovarajući način, tehnologija pomaže učenicima u kvalitetnijem pamćenju nastavnih sadržaja, potiče

otkrivanje novih informacija, a može služiti i kao sredstvo računanja (Brown i sur., 2004).

Tijekom akcijskog istraživanja posebno je do izražaja došlo *rješavanje problemskih zadataka koji promiču zaključivanje*. Učenici su rado i aktivno sudjelovali u njihovu rješavanju i na taj način formirali su trajno znanje i dublje razumijevanje matematičkih sadržaja. Salmer i Kale (2013) ističu da je u svrhu poboljšavanja matematičkog obrazovanja nužno povezati rješavanje problema s učenjem matematičkih pojmova te da oni trebaju biti međusobno ovisni.

Uporaba *tehnologije* kod učenika je izazvala zadovoljstvo. Prema Cullen i sur. (2020) učenici trebaju naučiti kako koristiti tehnologiju, ali ne po cijeni gubljenja matematičkih pojmova iz vida. Učitelji trebaju tehnologiju kombinirati s autentičnim aktivnostima koje omogućuju učenicima da ju povezuju s onim što uče na nastavi matematike.

Korištenje konkretnog materijala u nastavi pozitivno je utjecalo na učenje učenika kao i na povećanje učeničke aktivnosti tijekom istraživanja. Boggan i sur. (2010) smatraju da se konkretni materijali trebaju koristiti promišljeno, osmišljeno, ali i pravilno kako bi se izbjegli potencijalni problemi. Konkretni materijali trebaju biti izabrani prema učeničkoj dobi i specifičnim matematičkim ciljevima i zadacima.

Aktivnosti *suradničkog učenja* omogućile su učenicima međusobnu komunikaciju pri ostvarivanju dogovorenih matematičkih ciljeva. Kroz interakciju u suradničkom učenju učenici su rješavali matematičke probleme, razmjenjivali ideje i gradili nova razmišljanja. Učeći zajedno učenici su pokazali sofisticiraniju razinu diskursa te su mogli intelektualno više doprinijeti svom učenju što je u skladu s rezultatima drugih istraživanja (Gillies i Boyle, 2010; Johnson i Johnson, 2002).

Kako bih ostvarila zadovoljstvo učenika nastavom i motivaciju te dobila odgovor na *drugo istraživačko pitanje*, matematiku sam im nastojala učiniti zanimljivom.

Uloga je učitelja stvarati poželjno i motivirajuće okruženje za učenje matematike jer ono ne može biti produktivno bez poticajnih uvjeta. Osim toga, važno je u nastavi matematike poći od interesa učenika i poticati ga. Interes učenika pozitivno utječe na pažnju i učenje matematike, a na njegov razvoj utječu različiti čimbenici kao što su zanimljiv tekst, digitalni sadržaji. Prvi koji je naglašavao važnost interesa bio je Dewey (1913). On je smatrao da interes treba biti prisutan u nastavi kako bi učenici različitih mogućnosti ostvarili napredak.

Rutt i sur. (2014) smatraju da učenje u paru može doprinijeti učeničkoj motivaciji i stvoriti pozitivan odnos prema nastavi matematike. Tijekom akcijskog istraživanja na taj način učenici

su učili jedni od drugih, međusobno su se kontrolirali i pružali si podršku, nadopunjavali su svoje znanje i postali su prisniji. Nadalje, istraživanjem sam pokazala da primjenom igre u suradničkim aktivnostima nastava matematike postaje zanimljivija. Igrom sam učenicima pokazala zanimljivu stranu matematike. Rješavanjem matematičkih problema potaknuli smo učenike na razmišljanje. Važno je napomenuti kako se problemski zadatci mogu predočiti na zabavan način te tako pobuditi veći interes za učenjem matematike što smo često činili za vrijeme ovog istraživanja. Nadalje, uporaba konkretnog materijala na nastavi matematike pozitivno utječe na učenje učenika (Boggan i sur., 2010). Učenicima je važno osigurati konkretan materijal zbog apstraktnosti matematičkih pojmova. Učenicima nije dostatno objasniti neki matematički pojam već ga je nužno i vizualizirati konkretnim materijalom. U provedenom akcijskom istraživanju učenicima sam pomogla bolje shvatiti matematičke sadržaje uporabom različitog konkretnog materijala. Nadalje, zadovoljstvo učenika tijekom istraživanja izazvala je i upotreba tehnologije. Tehnologijom sam pokušala privući pozornost učenika te ih motivirati na aktivnost u rješavanju matematičkih zadataka.

Provođenjem akcijskog istraživanja pokušala sam otkriti koje su se promjene dogodile u znanjima i stavovima mene kao učiteljice i time dobiti odgovor na *treće istraživačko pitanje*.

U okviru svog akcijskog istraživanja nastojala sam kod učenika potaknuti *odgovornost i samostalnost u učenju, aktivno sudjelovanje u nastavnom procesu, suradnju među učenicima i napredovanje u matematici*. Početne nastavne aktivnosti temeljile su se pretežito na izlaganju nastavnih sadržaja, davanju povratnih informacije te kretanju po razredu kako bih pomogla učenicima u rješavanju zadataka. Za vrijeme svog akcijskog istraživanja mijenjala sam svoju nastavnu praksu kako bi kod učenika više do izražaja došli *samostalnost, suradnja i aktivno sudjelovanje u nastavnom procesu*. Današnje suvremeno obrazovanje usmjerava nas učitelje i nastavnike na konstantno ulaganje u profesionalni razvoj kako bismo produbili svoje znanje i povećali svoju stručnost. Tijekom istraživanja nastojala sam samokritički propitivati svoju nastavu i učenje učenika kako bih unijela suštinske promjene. U akcijskom istraživanju svojim sam djelovanjem u praksi nastojala pronaći prikladna rješenja koja su bila primjerena mogućnostima učenika te sam nastojala nastavu pripremati prema njihovim interesima. Osim toga razvila sam vještinu samokritičkog sagledavanja vlastite prakse. Akcijskim istraživanjem postala sam učitelj istraživač koji nastoji unaprijediti svoju odgojnu praksu. Prikupljala sam podatke, odnosno povratne informacije na temelju kojih sam samokritički propitivala svoje djelovanje. Promjene se nisu dogodile samo u nastavnim sadržajima, nego su se dogodile i u mojoj praksi te u njezinu teorijskom razumijevanju. Budući da sam bila pokretač promjena,

uspjeh provedenog istraživanja ovisio je o mojoj spremnosti na učenje i djelovanje. Moj profesionalni razvoj tijekom istraživanja temeljio se na individualnom učenju. Svoje profesionalno učenje u budućnosti namjeravam obogatiti sudjelovanjem u zajednicama učenja i projektnim timovima. Zaključila sam kako je promjene moguće ostvariti, ali one ponajprije ovise o osobnom angažmanu, ustrajnosti i motivaciji učitelja. Najvažnije je otvoriti se prema promjenama te samoinicijativno sudjelovati u različitim aktivnostima profesionalnog razvoja.

LITERATURA

- Anderson, L. W. i Krathwohl, D. R. (ur.) (2001). *A Taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of bloom's taxonomy of educational objectives*. Addison Wesley Longman.
- Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K. i Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: An enigma in search of an explanation. *Educational Studies in Mathematics*, 87(1), 7–26. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9545-3>
- Anthony, G. i Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics*. Wellington: Ministry of Education.
- Aronson, E., Wilson, T. D., Akert, R. M. i Sommers, S. R. (2018). *Social Psychology* (10. izd.). Pearson.
- Badger, J. (2013). Teaching Singapore Math: Evaluating measures to effectively teach and implement a new mathematics curriculum in 21 elementary schools (2013). *GATEways to Teacher Education*. 14(1), 23–41.
- Bailey, D., Duncan, G. J., Odgers, C. L. i Yu, W. (2017). Persistence and fadeout in the impacts of child and adolescent interventions. *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 10(1), 7–39. <https://doi.org/10.1080/19345747.2016.1232459>
- Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M. i Robitzsch, A. (2015). Effects of playing mathematics computer games on primary school students' multiplicative reasoning ability. *Contemporary Educational Psychology*, 40, 55–71. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2014.09.001>
- Bandura, A. (1993). Perceived selfefficacy in cognitive development and functioning. *Educational Psychologist*, 28(2), 117–148. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2802_3
- Banić, S. (2013). Funkcija i njen graf: razmisli, poveži, obrazloži!. *Matematika i škola*, 69, 162–164. <https://mis.element.hr/fajli/1207/69-04.pdf>
- Barber, M., Mourshed, M. i Company, M. (2007). *How the world's best-performing school systems come out on top*. McKinsey & Company. <https://www.mckinsey.com/industries/education/our-insights/how-the-worlds-best-performing-school-systems-come-out-on-top>

- Battistich, V. i Watson, M. (2003). Fostering social development in preschool and the early elementary grades through co-operative classroom activities. U A. Ashman i R. Gillies (ur.), *Co-operative learning: The social and intellectual outcomes of learning in groups* (str. 19–35). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203465264>
- Bazeley, P. (2013). *Qualitative data analysis: Practical strategies*. SAGE.
- Behar-Horenstein, L. i Seabert, D. (2005). Teachers' use of models of teaching. *Educational Practice and Theory*, 27(1), 49–66. <https://doi.org/10.7459/ept/27.1.04>
- Bergmann, J. i Sams, A. (2015). *Flipped learning for math instruction*. International Society for Technology in Education.
- Bernt, P. W., Turner, S. V. i Bernt, J. P. (2005). Middle school students are co-researchers of their media environment: An integrated project. *Middle School Journal*, 37(1), 38–44. <https://doi.org/10.1080/00940771.2005.11461515>
- Blalock, J. T. (2011). *The impact of Singapore Math on student knowledge and enjoyment in mathematics*. [Doctoral dissertation, Louisiana Tech University]. Louisiana Tech Digital Commons. <https://digitalcommons.latech.edu/dissertations/357>
- Blatchford, P., Baines, E., Rubie-Davies, C., Bassett, P. i Chowne, A. (2006). The effect of a new approach to group work on pupil-pupil and teacher-pupil interactions. *Journal of Educational Psychology*, 98(4), 750–765. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.4.750>
- Boggan, M., Harper, S. i Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, 3, 1–6. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1096945>
- Bognar, B. (2006). Akcijska istraživanja u školi. *Odgojne znanosti*, 8(1), 209–228. <https://hrcak.srce.hr/26189>
- Bognar, B. (2009). Ostvarivanje suštinskih promjena u odgojnoj praksi posredstvom akcijskih istraživanja. *Odgojne znanosti*, 11(2), 399–414.
- Bognar, B. (2011). Problemi u ostvarivanju suštinskih promjena u odgojnoj praksi posredstvom akcijskih istraživanja. U D. Kovačević i R. Ozorlić Dominić (ur.), *Akcijsko istraživanje i profesionalni razvoj učitelja i nastavnika* (str. 41–60). Agencija za odgoj i obrazovanje.
- Bognar, B. (2016a). Theoretical backgrounds of e-learning. *Croatian Journal of Education*, 18(1), 225–256. <https://doi.org/10.15516/cje.v18i1.1475>

- Bognar, B. (2016b). Kako do suštinskih promjena u obrazovnom sustavu? U R. Jukić, K. Bogatić, S. Gazibara, S. Pejaković, S. Simel, A. Varga, V. Campbell-Bar (ur.), *Zbornik znanstvenih radova s Međunarodne znanstvene konferencije Globalne i lokalne perspektive pedagogije* (str. 324–334). Filozofski Fakultet Osijek, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.
- Bognar, B. (2017). Ususret promjenama odgojno-obrazovnog sustava. *Radovi Zavoda za znanstvenoistraživački i umjetnički rad u Bjelovaru*, 10(11), 143–166. <https://doi.org/10.21857/ypn4oc82o9>
- Bognar, B. i Filipov, M. (2020). Online stručno usavršavanje: Važan uvjet uspješne nastave na daljinu. U A. Kolak i I. Markić (ur.), *Školovanje od kuće i nastava na daljinu u vrijeme HR-COVID-19* (str. 203–239). Hrvatska akademija znanosti i umjetnosti, Zavod za znanstvenoistraživački i umjetnički rad u Bjelovaru i Hrvatsko pedagogijsko društvo.
- Bognar, B. i Lukaš, M. (2016). Ostvarivanje bitnih promjena u nastavi u sjeni reformi obrazovnog sustava. *Život i škola*, 62(3), 39–52. <https://hrcak.srce.hr/176545>
- Bognar, L. (2006). Suradničko učenje u sveučilišnoj nastavi. *Život i škola : časopis za teoriju i praksu odgoja i obrazovanja*, 52(15–16), 7–16. <https://hrcak.srce.hr/25020>
- Bognar, L. i Matijević, M. (2002). *Didaktika*. Školska knjiga.
- Brahier, D., Leinwand, S. i Huinker, D. (2014). Principles to actions: Mathematics programs as the core for student learning. *The Mathematics Teacher*, 107(9), 656–658. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.107.9.0656>
- Brookhart, S. M. (2008). *How to give effective feedback to your students*. ASCD.
- Brown, G., Cadman, K., Cain, D. i sur. (2004). *ICT and Mathematics: A guide to learning and teaching mathematics 11-19 using ICT*. Mathematical Association.
- Bruening, L. i Saum, T. (2008). *Suradničkim učenjem do uspješne nastave: Kako aktivirati učenike i potaknuti ih na suradnju*. Naklada Kosing.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. The Belknap Press.
- Buljan Culej, J. (2012a). *PIRLS 2011: Izvješće o postignutim rezultatima iz čitanja*. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. http://dokumenti.ncvvo.hr/PIRLS/Dokumenti/PIRLS_2011_izvjesce.pdf

- Buljan Culej, J. (2012b). *Timms 2011: Izvješće o postignutim rezultatima iz matematike*. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. <https://www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2016/01/TIMSS-2011.-Izvje%C5%A1%C4%87e-o-postignutim-rezultatima-iz-matematike.pdf>
- Burns, M. K., Walick, C., Simonson, G. R., Dominguez, L., Harelstad, L., Kincaid, A. i Nelson, G. S. (2015). Using a Conceptual Understanding and Procedural Fluency Heuristic to Target Math Interventions with Students in Early Elementary. *Learning Disabilities Research & Practice*, 30(2), 52–60. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12056>
- Cai, J., Kaiser, G., Perry, B. i Wong, N. (2009). *Effective mathematics teaching from teacher's perspectives*. Sense Publishers.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C. i Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Chang, S. H., Lee, N. H. i Koay, P. L. (2017). Teaching and learning with concrete-pictorial-abstract sequence: A proposed model. *The Mathematics Educator*, 17(1), 1–28. http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV17_1/paper1.pdf
- Cheung, A. C. K. i Slavin, R. E. (2016). How methodological features affect effect sizes in education. *Educational Researcher*, 45(5), 283–292. <https://doi.org/10.3102/0013189X16656615>
- Cindrić, M. (2016). Problemska nastava i dječje strategije u nižim razredima osnovne škole. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike*, 17(65), 52–57. <https://hrcak.srce.hr/169560>
- Clark, A. (2010). *Singapore math: A visual approach to word problems model drawing in Math in focus*. Marshall Cavendish Education. https://www.hmhco.com/~media/sites/home/education/global/pdf/white-papers/mathematics/elementary/math-in-focus/mif_model_drawing_lr.pdf?la=en
- Cohen, L., Manion, L. i Morrison, K. (2007). *Metode istraživanja u obrazovanju*. Slap.
- Conway, P. i Finbarr, S. (2006). *International trends in post-primary mathematics education: Perspectives on teaching, learning and assessment*. National Council for Curriculum and Assessment (NCCA). <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3124.1367>

- Costa, A. i Kallick, B. (1993). Through the Lens of a Critical Friend. *Educational Leadership*, 51, 49–51. <http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/oct93/vol51/num02/Through-the-Lens-of-a-Critical-Friend.aspx>
- Cullen, C. J., Hertel, J. T. i Nickels, M. (2020). The Roles of Technology in Mathematics Education. *The Educational Forum*, 84(2), 166–178. <https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683>
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson.
- Department of Education and Training. (2020). *High impact teaching strategies: Excellence in teaching and learning*. State of Victoria. <https://www.education.vic.gov.au/Documents/school/teachers/support/high-impact-teaching-strategies.pdf>
- deKock, W. D. i Harskamp, E. G. (2014). Can teachers in primary education implement a metacognitive computer programme for word problem solving in their mathematics classes? *Educational Research and Evaluation*, 20(3), 231–250. <https://doi.org/10.1080/1380361>
- Denhere, C., Chinyoka, K. i Mambeu, J. (2013). Vygotsky's zone of proximal development theory: What are its implications for mathematical teaching? *Greener Journal of Social Sciences*, 3, 371–377. <https://pdfs.semanticscholar.org/1331/9ed7d61cd5786f062211a2bd34c8f488d01c.pdf>
- Dewey, J. (1913). *Interest and effort in education*. Riverside Press.
- Dohrmann, K., Nishida, T., Gartner, A., Lipsky, D. i Grimm, K. (2007). High school outcomes for students in a public Montessori program. *Journal of Research in Childhood Education*, 22, 205–217. <https://doi.org/10.1080/02568540709594622>
- Donabella, M. A. i Rule, A. C. (2008). Four Seventh Grade Students Who Qualify for Academic Intervention Services in Mathematics Learning Multi-Digit Multiplication with the Montessori Checkerboard. *Teaching Exceptional Children Plus*, 4(3). <https://eric.ed.gov/?id=EJ967477>
- Donohoo, J. A. M. (2017). *Collective efficacy: How educators' beliefs impact student learning*. SAGE.
- Donohoo, J., Hattie, J. i Eells, R. (2018). The Power of Collective Efficacy. *Educational Leadership*, 75(6), 40–44. <https://www.ascd.org/el/articles/the-power-of-collective-efficacy>

- Dooley, T., Dunphy, E., Shiel, G., Butler, D., Corcoran, D., Farrell, T., NicMhuira, S., O'Connor, M., Travers, J. i Perry, B. (2014). Mathematics in early childhood and primary education (3-8 years): Teaching and learning. National Council for Curriculum and Assessment. https://ncca.ie/media/2147/ncca_research_report_18.pdf
- Double, K. S., McGrane, J. A. i Hopfenbeck, T. N. (2020). The Impact of Peer Assessment on Academic Performance: A Meta-analysis of Control Group Studies. *Educ Psychol Rev*, 32, 481–509. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09510-3>
- Dunphy, E., Dooley, T. i Shiel, G. (2014). *Mathematics in Early Childhood and Primary Education (children aged 3-8 years). Definitions, theories, stages of development and progression.* (Istraživački izvještaj br. 17). National Council for Curriculum and Assessment. https://ncca.ie/media/1494/math_in_eccp_education_theories_progression_researchreport_17.pdf
- Eberling, S., Grbac, N. i Janeš, S. (2019). Modeliranje pomoću blokova. *Poučak*, 20(78), 39–48. <https://hrcak.srce.hr/231214>
- Edge Hill University. (2016). *Numbers count promo video* [Video]. Every Child Counts. <https://everychildcounts.edgehill.ac.uk/wp-content/uploads/2016/03/NumbersCount-promo-video.mp4>
- Educational Research Institute of America. (2010). *A study of the Singapore math program, Math in Focus, state test results.* (Izvještaj br. 404). Houghton Mifflin Harcourt.
- Educational Research Institute of America. (2017). *A study of the Singapore math program, Math in Focus, state test results.* (Izvještaj br. 526). Houghton Mifflin Harcourt.
- Eells, R. J. (2011). *Meta-Analysis of the Relationship Between Collective Teacher Efficacy and Student Achievement.* [Doctoral dissertation, Loyola University Chicago]. Loyola eCommons. https://ecommons.luc.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1132&context=luc_diss
- Elezović, I., Antulić Majcen, S., Vranković, B. i Muraja, J. (2021). *Rezultati TIMSS 2019 – Međunarodnoga istraživanja trendova u znanju matematike i prirodoslovlja: Nacionalni izvještaj: Republika Hrvatska.* Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. <https://www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2022/03/TIMSS-Nacionalni-izvjestaj-finale.pdf>
- Erol, M. i Karaduman, G. B. (2018). The effect of activities congruent with brain based learning model on students' mathematical achievement. *NeuroQuantology*, 16(5). 13–22. <https://doi.org/10.14704/nq.2018.16.5.1342>

- Faber, J., Luyten, J. W. i Visscher, A. J. (2017). The effects of a digital formative assessment tool on mathematics achievement and student motivation: Results of a randomized experiment. *Computers & education*, 106, 83–96. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.12.001>
- Faryadi, Q. (2017) The application of Montessori method in learning mathematics: An experimental research. *Open Access Library Journal*, 4, 1–14. <https://doi.org/10.4236/oalib.1104140>
- Fong, H. K. i Chelvi, R. (2013). *Math in focus: Singapore math*. Marshall Cavendish Education.
- Frey, N. i Fisher, D. (2011). *The formative assessment action plan: Practical steps to more successful teaching and learning*. ASCD.
- Fuchs, L. S., Geary, D. C., Compton, D. L., Fuchs, D., Schatschneider, C., Hamlett, C. L., DeSelms, J., Seethaler, P. M., Wilson, J., Craddock, C. F., Bryant, J. D., Luther, K. i Changas, P. (2013). Effects of first-grade number knowledge tutoring with contrasting forms of practice. *Journal of Educational Psychology*, 105(1), 58–77. <https://doi.org/10.1037/a0030127>
- Fuchs, L., Paulsen, K. i Fuchs, D. (2017a). *Number Rockets: First grade small group tutoring*. Vanderbilt University. http://frg.vkcsites.org/wp-content/uploads/2018/02/Number-Rockets-Excerpt_Combined_Manual_Suppl.pdf
- Fuchs, L., Paulsen, K. i Fuchs, D. (2017b). *Pirate Math: Word – problem solving program at second grade*. Vanderbilt University.
- Fuchs, L. S., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., Fletcher, J. M., Fuchs, D. i Hamlett, C. L. (2010). The effects of strategic counting instruction, with and without deliberate practice, on number combination skill among students with mathematics difficulties. *Learning and Individual Differences*, 20(2), 89–100. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.09.003>
- Fuchs, L., Schumacher, R., Malone, A. i Fuchs, D. (2015). *Fraction Face-off!: Fraction Foundation Tutoring Program for Fourth Grade*. Vanderbilt University. <http://frg.vkcsites.org/wp-content/uploads/2018/02/Fraction-Face-Off-Excerpt-for-Website.pdf>
- Fuchs, L. S., Sterba, S. K., Fuchs, D. i Malone, A. S. (2016). Does evidence-based fractions intervention address the needs of very low-performing students? *Journal of Research on Educational Effectiveness*, 9(4), 662–677. <https://doi.org/10.1080/19345747.2015.1123336>

- Fullan, M. (2004). *Systems thinkers in action: Moving beyond the standards plateau*. Department for Education and Skill. <http://www.michaelfullan.ca/wp-content/uploads/2016/06/13396063090.pdf>
- Fullan, M. (2006). *Change theory: A force for school improvement*. CSE Centre for Strategic Education.
- Fullan, M. (2007). *The new meaning of educational change* (4. izd.). Teachers College Press
- Fullan, M. (2009). Large-scale reform comes of age. *Journal of Educational Change*, 10(2), 101–113. <https://doi.org/10.1007/s10833-009-9108-z>
- Fullan, M. (2011a) *Whole system reform for innovative teaching and learning*. Innovative Teaching and Learning. http://www.michaelfullan.ca/wp-content/uploads/2016/06/Untitled_Document_5.pdf
- Fullan, M. (2011b). *Choosing the wrong drivers for whole system reform*. Centre for Strategic Education. <http://michaelfullan.ca/wp-content/uploads/2016/06/13396088160.pdf>
- Fullan, M. i Stiegelbauer, S. (1991). The new meaning of educational change. *School Effectiveness and School Improvement*, 2(4), 336–343. <https://doi.org/10.1080/0924345910020406>
- Geier, R., Blumenfeld, P. C., Marx, R. W., Krajcik, J. S., Fishman, B., Soloway, E. i Clay-Chambers, J. (2008). Standardized test outcomes for students engaged in inquiry-based science curricula in the context of urban reform. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(8), 922–939. <https://doi.org/10.1002/tea.20248>
- Gersten, R., Rolfhus, E., Clarke, B., Decker, L. E., Wilkins, C. i Dimino, J. (2015). Intervention for first graders with limited number knowledge large-scale replication of a randomized controlled trial. *American Educational Research Journal*, 52(3), 516–546. <https://doi.org/10.3102/0002831214565787>
- Gifford, S. (2005). *Teaching Mathematics 3-5*. McGraw-Hill Education.
- Gillies, R. M. i Boyle, M. (2010). Teachers' reflections on cooperative learning: Issues of implementation. *Teaching and Teacher Education*, 26(4), 933-940. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.10.034>
- Glasnović Gracin, D. (2008). Računalo u nastavi matematike: Teorijska podloga i metodičke smjernice. *Matematika i škola*, 46, 10–15. <https://mis.element.hr/fajli/824/46-03.pdf>

- Glasnović Gracin, D. (2014). Modeli aritmetika za razrednu nastavu. *Poučak*, 15(59), 12–21. <https://hrcak.srce.hr/140113>
- Glasnović Gracin, D. i Domović, V. (2009). Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole. *Odgojne znanosti*, 11(2), 45–65. <https://hrcak.srce.hr/48441>
- Glasnović Gracin, D. i Herjavec, D. (2010). Računska gusjenica. *Matematika i škola*, 57, 59–63. <https://mis.element.hr/fajli/1014/57-03.pdf>
- Glasnović Gracin, D. i Jerec, H. (2012). Stern blokovi. *Matematika i škola*, 64 (4), 154–159. <https://mis.element.hr/fajli/1131/64-03.pdf>
- Glasnović Gracin, D. i Jukić Matić, Lj. (2021). Use of textbooks and other resources in curriculum reform: A longitudinal case study. *ZDM – Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01271-0>
- Glasnović Gracin, D. i Trupčević, G. (2014). „Što bi bilo kad bi...?“. *Matematika i škola*, 74, 147–154. <http://mis.element.hr/fajli/1292/74-02.pdf>
- Gough, D., Oliver, S. i Thomas, J. (ur.). (2017). *An introduction to systematic reviews*. SAGE.
- Grant, M. M. i Branch, R. M. (2005). Project-based learning in a middle school. *Journal of Research on Technology in Education*, 38(1), 65–98. <https://doi.org/10.1080/15391523.2005.10782450>
- Grouws, D. i Cebulla, K. (1999). *Improving student achievement in mathematics*. Educational Research Service.
- Gudjons, H. (1994). *Pedagogija: temeljna znanja*. Educa
- Guskey, T. R. (2019). Interpreting average effect sizes: Never a center without a spread. *NASSP Bulletin*, 103(4), 273–280. <https://doi.org/10.1177/0192636519889151>
- Hargreaves, A. i Shirley, D. (2009). *The fourth way: The inspiring future for educational change*. Corwin Press, <https://dx.doi.org/10.4135/9781452219523>
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.
- Hattie, J. A. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. Routledge.

- Hattie, J. A. (2015a). *Know thy impact: Visible learning in theory and practice*. Routledge.
https://s3-us-west-2.amazonaws.com/tandfbis/rt-files/docs/FreeBooks+Opened+Up/Know_Thy_Impact_Visible_Learning_in_Theory_and_Practice.pdf
- Hattie, J. (2015b). *What doesn't work in education: The politics of distraction*. Pearson.
https://visible-learning.org/wp-content/uploads/2015/06/John-Hattie-Visible-Learning-creative-commons-book-free-PDF-download-What-doesn-t-work-in-education_the-politics-of-distraction-pearson-2015.pdf
- Hattie, J. (2017). *Visible learning for mathematics, grades K-12 What Works Best to Optimize Student Learning*. Corwin.
- Hattie, J. i Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Hiebert, J. i Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students's learning. U F. K. Lester (ur.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (str. 371–404). Information Age.
- Hoogsteen, T. J. (2020). Collective teacher efficacy: A critical review of education's top influence. *Advances in Social Sciences Research Journal*, 7(6), 574–586.
<https://doi.org/10.14738/assrj.76.8494>
- Hopkins, D. (2011). *Powerful learning: Taking educational reform to scale*. State of Victoria, Department of Education and Early Childhood Development.
<https://www.education.vic.gov.au/Documents/about/research/hopkinspowerfulllearning.pdf>
- Horton, J. (2016). *The effects of representational math in a Montessori classroom*. [Master's thesis, University of Wisconsin-River Falls]. MINDS@UW.
<https://minds.wisconsin.edu/bitstream/handle/1793/74957/JohnHorton.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Isaacs, B. (2015). *Bringing the Montessori approach to your early years practice*, Routledge.
- Jacobse, A. E. i Harskamp, E. G. (2011). *A meta-analysis of the effects of instructional interventions on students' mathematics achievement*. Gronings Instituut voor Onderzoek van Onderwijs.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D. i Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 2: Udžbenik matematike u drugom razredu osnovne škole*. Školska knjiga.

- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D. i Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 2: Radna bilježnica u drugom razredu osnovne škole*. Zagreb: Školska knjiga.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D. i Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 2: Zbirka zadataka u drugom razredu osnovne škole*. Školska knjiga.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D. i Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 3: Udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole*. Školska knjiga.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D. i Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 3: Radna bilježnica u trećem razredu osnovne škole*. Školska knjiga.
- Jakovljević Rogić, S., Miklec, D. i Prtajin, G. (2021). *Moj sretni broj 3: Zbirka zadataka u trećem razredu osnovne škole*. Školska knjiga.
- Jerbić-Zorc, G., Mišurac, I., Sikirica, M. i Sirovina, D. (2018). *Priručnik za primjenu i izradu e-Škole scenarija poučavanja*. Hrvatska akademska i istraživačka mreža – CARNET. <https://pilot.e-skole.hr/wp-content/uploads/2018/04/Prirucnik-za-primjenu-i-izradu-e-Skole-scenarija-poucavanja.pdf>
- Johnson, D. W. i Johnson, R. T. (1990). Using cooperative learning in math. U N. Davidson (ur.), *Cooperative learning in mathematics: A handbook for teachers* (str. 103–125). Addison-Wesley.
- Joyce, B. R. i Weil, M. (2003). *Models of teaching*. Prentice-Hall. <https://niepid.nic.in/MODELS%20OF%20TEACHING.pdf>
- Joynes, C., Rossignoli, S. i Fenyiwa Amonoo-Kuofi, E. (2019). *21st century skills: Evidence of issues in definition, demand and delivery for development contexts* (K4D Helpdesk Report). Institute of Development Studies.
- Jukić Matić, Lj. (2017). The effect of problem solving course on pre-service teachers' beliefs about problem solving in school mathematics and themselves as problem solvers. *Magistra Iadertina*, 12(2), 141–159. <https://doi.org/10.15291/magistra.1494>
- Jukić Matić, Lj., Moslavac Bičvić, D. i Filipov, M. (2020). Characteristics of effective teaching of mathematics. *Pedagoška obzorja*, 35(3–4), 19–37.
- Jukić Matić, Lj. i Širić, I. (2018). Singapurska metoda modela. *Matematika i škola*, 95, 195–199. <https://mis.element.hr/fajli/1659/95-02.pdf>

- Jukić, R. (2013). Konstruktivizam kao poveznica poučavanja sadržaja prirodosnanstvenih i društvenih predmeta. *Pedagogijska istraživanja*, 10(2), 241–261. <https://hrcak.srce.hr/129671>
- Juričić Devčić, M., Mrkonjić, I. i Topolovec, V. (2012). Kognitivne i kauzalne mape u vizualizaciji znanja. U V. Šimović i A. Bežen (ur.), *Book of Abstracts: Education in the modern European environment - EMEE 2012* (str. 1–22). Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu. https://www.bib.irb.hr/607461/download/607461.EMEE2012-Kognitivne_i_kauzalne_mape__web.pdf
- Jurić, J., Mišurac, I. i Vežić, I. (2019). Struktura zadataka prema Bloomovoj taksonomiji u udžbenicima iz matematike za razrednu nastavu. *Školski vjesnik*, 68(2), 469–487. <https://hrcak.srce.hr/234968>
- Kaasila, E. i Pehkonen, E. (2009). Effective mathematics teaching in Finland through the eyes of elementary student teachers. U J. Cai, G. Kaiser i B. i. Perry (Ur.), *Effective mathematics teaching from teachers's perspectives: National and Cross-National Studies* (str. 203–216). Netherlands: SENSE.
- Kadum-Bošnjak, S. i Buršić-Križanac, B. (2012). Impact of differentiated instruction on achievement in teaching mathematics to lower-stage grades. *Metodički obzori*, 7(2), 15–29.
- Kale, U. i Selmer, S. (2013). Teaching mathematics through problem solving. *Innovación Educativa*, 13, 45–60.
- Karajić, N., Ivanec, D., Geld, R. i Spajić-Vrkaš, V. (2019). *Vrednovanje eksperimentalnoga programa Škola za život u školskoj godini 2018./2019.* Ministarstvo znanosti i obrazovanja. <https://skolazazivot.hr/vrednovanje-eksperimentalnoga-programa-skola-za-zivot-u-skolskoj-godini-2018-2019/>
- Kaur, B. (2019). The why, what and how of the ‘Model’ method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, 51(1), 151–168. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y>
- Kaur, B., Soh, C. K., Wong, K. Y., Tay, E. G., Toh, T. L., Lee, N. H., Ng, S. F., Dindyal, J., Yen, Y. P., Loh, M. Y., Tan, H. C. J. i Tan, L. C. (2015). Mathematics education in Singapore. U S. J. Cho (ur.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (str. 311–316). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_21

- Kersaint, G. (2015). *Orchestrating mathematical discourse to enhance student learning*. Curriculum Associates, LLC.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. i Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Kinard, J. i Kozulin, A. (2008). *Vygotsky's sociocultural theory and mathematics learning. in rigorous mathematical thinking: Conceptual formation in the mathematics classroom*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511814655.004>
- Kitwood, T. M. (1977). *Values in adolescent life: Towards a critical description*. [Doctoral dissertation, University of Bradford]. The British Library Board. <https://ethos.bl.uk/OrderDetails.do?uin=uk.bl.ethos.462205>
- Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S. i Baumert, J. (2013). Teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge: The role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education*, 64(1), 90–106. <https://doi.org/10.1177/0022487112460398>
- Kofa, L. (2017). Elementary teachers' perceptions of mathematics instruction in Montessori and traditional classrooms. [Doctoral dissertation, Walden University]. ScholarWorks. <https://scholarworks.waldenu.edu/dissertations/4645/>
- Kolesarić, V. i Tomašić Humer, J. (2016). *Veličina učinka*. Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Filozofski fakultet. <http://www.ffos.unios.hr/download/velicina-ucinka-nastavna-skripta.pdf>
- Koludrović, M. (2013). Mogućnosti razvijanja kompetencija učenja u suvremenoj nastavi. *Pedagoški istraživanja*, 10(2), 295–305. <https://hrcak.srce.hr/129614>
- Konstantopoulos, S., Miller, S. R. i van der Ploeg, A. (2013). The impact of Indiana's system of interim assessments on mathematics and reading achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 35(4), 481–499. <https://doi.org/10.3102/0162373713498930>
- Kostić Kovačević, I., Lukač, D., Gavrilović, J. i Đurović, D. (2014). Obrazovni alati u nastavi matematike. U *Sinteza 2014 – Impact of the internet on business activities in Serbia and worldwide* (str. 340–344). Singidunum University. <https://doi.org/10.15308/sinteza-2014-340-344>
- Kraft, M. A. (2020). Interpreting Effect Sizes of Education Interventions. *Educational Researcher*, 49(4), 241–253. <https://doi.org/10.3102/0013189X20912798>

- Krapp, A. (2002). Structural and dynamic aspects of interest development: Theoretical considerations from an ontogenetic perspective. *Learning and Instruction*, 12(4), 383-409. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(01\)00011-1](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(01)00011-1)
- Kugley, S., Wade, A., Thomas, J., Mahood, Q., Jørgensen, A.-M. K., Hammerstrøm, K. i Sathe, N. (2017). Searching for studies: A guide to information retrieval for Campbell systematic reviews. *Campbell Systematic Reviews*, 13(1), 1–73. <https://doi.org/10.4073/cmrg.2016.1>
- Kunter, M. i Voss, T., (2013). The model of instructional quality in COACTIV: A multicriteria analysis. U M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusamnn, S. Krauss i M. Nubrand (ur), *Cognitive activation in the mathematics classroom and profesional competence of teachers* (str. 97–119). Springer
- Kurnik, Z. (2000). Matematički zadatak. *Matematika i škola*, 2(7), 51–58. <https://mis.element.hr/fajli/545/07-02.pdf>
- Kurnik, Z. (2002). Načelo problemnosti. *Matematika i škola*, 14, 148–152. <https://mis.element.hr/fajli/216/14-02.pdf>
- Kurnik, Z. (2008). Znanstvenost u nastavi matematike. *Metodika*, 9(17), 318–327. <https://hrcak.srce.hr/34802>
- Kutnick, P., Blatchford, P. i Baines, E. (2002). Pupil groupings in primary school classrooms: Sites for learning and social pedagogy? *British Educational Research Journal – BR EDUC RES J*, 28, 187–206. <https://doi.org/10.1080/01411920120122149>
- Kutnick, P. i Berdondini, L. (2009). Can the enhancement of group working in classrooms provide a basis for effective communication in support of school-based cognitive achievement in classrooms of young learners? *Cambridge Journal of Education*, 39(1), 71–94. <https://doi.org/10.1080/03057640902836880>
- Kutnick, P., Ota, C. i Berdondini, L. (2008). Improving the effects of group working in classrooms with young school-aged children: Facilitating attainment, interaction and classroom activity. *Learning and instruction*, 18, 83-95. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.12.002>
- Kyndt, E., Raes, E., Lismont, B., Timmers, F., Cascallar, E. i Dochy, F. (2013). A meta-analysis of the effects of face-to-face cooperative learning: Do recent studies falsify or verify earlier findings?. *Educational Research Review*, 10, 133–149.
- Kyriacou, C. (2001). *Temeljna nastavna umijeća*. Educa.

- Kyriacou, C. (2005). The impact of daily mathematics lessons in England on pupil confidence and competence in early mathematics: A systematic review. *British Journal of Educational Studies*, 53(2), 168–186. doi:10.1111/j.1467-8527.2005.00289.x
- Kyriacou, C. (2009). *Effective teaching in schools: Theory and practice*. Nelson Thornes. <http://site.iugaza.edu.ps/akeshta/files/2018/02/Effective-Teaching-in-Schools-Theory-and-Practice1.pdf>
- Kyriacou, C. i Goulding, M. (2006). *Mathematics education: A systematic review of strategies to raise pupils' motivational effort in key stage 4 mathematics*. EPPI-Centre Social Science Research Unit; Institute of Education. https://setassets.et-foundation.co.uk/digital-assets/qtlsmap/Resources/13/strategies%20to%20raise%20learners%20motivational%20effort%20in%20key%20stage%204%20mathematics_0.pdf
- Larbi, E. i Mavis, O. (2016). The use of manipulatives in mathematics education. *Journal of Education and Practice*, 7(36), 53–61.
- Larson, L. C. i Miller, T. N. (2011). 21st century skills: prepare students for the future. *Kappa Delta Pi Record*, 47(3), 121–123. <https://doi.org/10.1080/00228958.2011.10516575>
- Lauritzen, P. (2012). Conceptual and procedural knowledge of mathematical functions. [Doctoral dissertation, University of Eastern Finland]. UEF eRepository. <https://erepo.uef.fi/handle/123456789/11481>
- Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C. i Murray, A. K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open*, 5(2), 1–8. <https://doi.org/10.1177/2158244015589588>
- Laski, E. V., Vasilyeva, M. i Schiffman, J. (2016). Longitudinal comparison of Montessori versus non-Montessori students' place-value and arithmetic knowledge. *Journal of Montessori Research*, 2(1), 1–15. <https://doi.org/10.17161/jomr.v2i1.5677>
- Leksikografski zavod Miroslav Krleža. (2021). Informacijska i komunikacijska tehnologija. U *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje.*, 2020. Preuzeto 24. 1. 2021. s <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=27406>
- Leong, Y., Ho, W. K. i Cheng, L. (2015). Concrete-pictorial-abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1–18. <https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/18889/1/TME-16-1-1.pdf>
- Lillard, A. S. (2005). *Montessori: The science behind the genius*. University Press.

- Lillard, A. S. (2013). Playful learning and Montessori education. *American Journal of Play* 5(2), 157–171. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1003949.pdf>
- Lillard, P. P. i Jessen, L. L. (2022). *Montessori od prvog dana*. Stilus knjiga
- Lindorff, A. M., Hall, J. i Sammons, P. (2019). Investigating a Singapore-Based Mathematics Textbook and Teaching Approach in Classrooms in England. *Frontiers in Education*, 4. <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/feduc.2019.00037>
- Lipsey, M. W., Puzio, K., Yun, C., Herbert, M. A., Steinka-Fry, K., Cole, M. W., Roberts, M., Anthony, K. S. i Busick, M. D. (2012). Translating the Statistical Representation of the Effects of Education Interventions into More Readily Interpretable Forms. National Center for Special Education Research, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. <https://ies.ed.gov/ncser/pubs/20133000/pdf/20133000.pdf>
- Literacy and Numeracy Secretariat. (2010). *Communication in the mathematics classroom* (Secretariat special edition br. 13). http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/CBS_Communication_Mathematics.pdf
- Livingston, K. (2012). Independent learning. U N. M. Seel (ur.), *Encyclopedia of the sciences of learning* (str. 1526–1529). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_895
- Loong, E. Y.-K. i Herbert, S. (2018). Primary school teachers' use of digital technology in mathematics: The complexities. *Mathematics Education Research Journal*, 30(4), 475–498. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0235-9>
- Lourenço, O. (2014). Piaget, Jean. U D. Phillips (ur.), *Encyclopedia of educational theory and philosophy* (Vol. 2, str. 623–628). Sage Publications, Inc.
- Lučić, K. i Matijević, M. (2004). *Nastava u kombiniranim odjelima – priručnik za učiteljice i učitelje*. Školska knjiga.
- Mahoney, K. (2012). Effects of Singapore's model method on elementary student problem-solving performance: single-case research. [Doctoral dissertation, Northeastern University]. Digital Repository Service. <https://doi.org/10.17760/d20002962>
- Markočić Dekanić, A. i Gregurović, M. (2020). *Nastavne strategije i metode vrednovanja učitelja i nastavnika Hrvatskoga jezika, Matematike i prirodoslovlja u Republici Hrvatskoj*. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje. https://pisa.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2020/05/U-Fokusu-Br-1_10.pdf

- Markočić Dekanić, A., Gregurović, M. i Batur, M. (2020). *TALIS 2018: Učitelji, nastavnici i ravnatelji – cijenjeni stručnjaci: Međunarodno istraživanje učenja i poučavanja*. Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. https://mk0ncvvot6usx5xu4d.kinstacdn.com/wp-content/uploads/2020/03/TALIS-2018_vol2_19_finn_zaWeb.pdf
- Markovitz, A. (2011). Akcijska istraživanja učitelja u nastavi: Drugačiji pogled. U D. Kovačević i R. Ozorlić Dominić (ur.), *Akcijska istraživanja i profesionalni razvoj učitelja i nastavnika* (str. 11–26). Agencija za odgoj i obrazovanje.
- Marzano, R. J. (2003). *What works in schools: Translating research into action*. Association for Supervision and Curriculum Development.
- Marzano, R. J., Pickering, D. i E. Pollock, J. (2006). *Nastavne strategije: Kako upotrijebiti devet najuspješnijih strategija*. Educa
- Mat Noor, M. i Shafee, A. (2021). The role of critical friends in action research: A framework for design and implementation. *Practitioner Research*, 3, 1–33. <https://doi.org/10.32890/pr2021.3>
- Matijević, M. (2001). *Alternativne škole: didaktičke i pedagoške koncepcije*, Zagreb: Tipex
- McNeil, N. M., Fyfe, E. R. i Dunwiddie, A. E. (2015). Arithmetic practice can be modified to promote understanding of mathematical equivalence. *Journal of Educational Psychology*, 107(2), 423–436. <https://doi.org/10.1037/a0037687>
- McNiff, J. i Whitehead, J. (2010). *You and your action research project*. Routledge
- McNiff, J. (2016). *Writing Up Your Action Research Project*. Routledge.
- Medeiros Neta, O. M. i Gutierre, L. dos S. (2020). The teaching of Mathematics in the thinking of Comenius, Pestalozzi and Montessori. *Educar em Revista*, 36. <https://doi.org/10.1590/0104-4060.64213>
- Meredith, Kurtis S., Steele, Jeannie L. i Temple, Charles (1998). *Cooperative leading and writing for critical thinking – RWCT*. University of Northern Iowa & International Reading Associations.

- Michaels, S. i O'Connor, C. (2015). Conceptualizing talk moves as tools: Professional development approaches for academically productive discussions. U L. B. Resnick, C. S. C. Asterhan, i S. N. Clarke (ur.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (str. 347–361). American Educational Research Association. https://doi.org/10.3102/978-0-935302-43-1_27
- Milas, G. (2005). *Istraživačke metode u psihologiji i drugim društvenim znanostima*. Naklada Slap.
- Miles, M. B., Huberman, A. M. i Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook*. SAGE.
- Milinković, J. i Bogavac, D. (2011). Montessori method as a basis for integrated mathematics learning. *Metodički obzori*, 6(1), 135–143. <https://doi.org/10.32728/mo.06.1.2011.11>
- Ministarstvo prosvjete i športa. (2002). *Projekt hrvatskog odgojno-obrazovnog ustava za 21. stoljeće*.
- Ministarstvo znanosti i obrazovanja (MZO). (2019). *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2*. https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf
- Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta (MZOS). (2014). *Nove boje znanja: Strategija obrazovanja, znanosti i tehnologije*. <https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Obrazovanje/Strategija%20obrazovanja,%20znanosti%20i%20tehnologije.pdf>
- Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa (MZOŠ). (2005). *Vodič kroz hrvatski nacionalni obrazovni standard za osnovnu školu*.
- Mink, D. V. (2009). *Strategies for teaching mathematics*. Shell Education.
- Montessori, M. (1964). *Dr. Montessori's own handbook: A short guide to her ideas and materials*. Robert Bentley.
- Montessori, M. (2004). *The Montessori method: The origins of an educational innovation: Including an abridged and annotated edition of Maria Montessori's the Montessori method*. Rowman & Littlefield.
- Mourshed, M., Chijioke, C. i Barber, M. (2010). *How the world's most improved school systems keep getting better*. McKinsey & Company.

- Mullender-Wijnsma, M. J., Hartman, E., de Greeff, J. W., Doolaard, S., Bosker, R. J. i Visscher, C. (2015). Physically active math and language lessons improve academic achievement: A cluster randomized controlled trial. *Pediatrics*, 137, 27–43.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y. i Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 assessment frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center; Lynch School of Education; Boston College. https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks.pdf
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L. i Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science*. TIMSS & PIRLS International Study Center; Lynch School of Education; Boston College. <https://timss2019.org/reports/wp-content/themes/timssandpirls/download-center/TIMSS-2019-International-Results-in-Mathematics-and-Science.pdf>
- Munjiza, E., Peko, A. i Sablić, M. (2007). Projektno učenje. *Sveučilište J. J. Strossmayera, Filozofski fakultet; Učiteljski fakultet*.
- Mužić, V. (2004). *Uvod u metodologiju istraživanja odgoja i obrazovanja*. Educa.
- Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja. (2019). Evaluacija eksperimentalnog programa „Škola za život“ (šk. God. 2018./2019.): Usporedba rezultata primjene upitnika u inicijalnom i finalnom mjerenju. <https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Obrazovanje/NacionalniKurikulum/Evaluacija-Skola-za-zivot/Skola%20za%20zivot%20-%20Usporedba%20rezultata%20primjene%20upitnika%20u%20inicijalnom%20i%20finalnom%20mjerenju%20-%20rujan%202019.pdf>
- National Child Welfare Resource Center for Organizational Improvement. (2008). *An introduction to the practice model framework: A working document series*. <http://muskie.usm.maine.edu/helpkids/practicemodel/PracticeModelWorkingPaperIntro.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) [(2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*.
- Newton, K. J. i Alexander, P. A. (2013). Early mathematics learning in perspective: Eras and forces of change. U L. D. English i J. T. Mulligan (ur.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (str. 5–28). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_2

- Nikčević-Milković, A. (2004). Aktivno učenje na visokoškolskoj razini. *Život i škola*, 50(12), 47–54. Preuzeto s <https://hrcak.srce.hr/25505>
- Nilsen, P. (2015). Making sense of implementation theories, models and frameworks. *Implementation Science*, 10(1), 1–13. <https://doi.org/10.1186/s13012-015-0242-0>
- Ningsih, E. F. i Retnowati, E. (2020). Prior knowledge in mathematics learning. *Proceedings of the SEMANTIK Conference of Mathematics Education (SEMANTIK 2019)* (str. 61–66). Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.200827.118>
- Noddings, N. (2007). Aims, Goals, and Objectives. *Encounters on Education*, 8, 7–15. <https://ojs.library.queensu.ca/index.php/encounters/article/download/571/751>
- OECD. (2020), *TALIS 2018 Results: Teachers and school leaders as valued professionals* (vol. II). https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pesquisa_talis/resultados/2018/TALIS2018_VOL_II_REL-OCDE_eng.pdf
- Ojose, B. (2008). Applying Piaget's theory of cognitive development to mathematics instruction. *Mathematics Educator*, 18(1), 26–30. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ841568.pdf>
- Osmosmjerka. (2020). U *Wikipedija*. <https://hr.wikipedia.org/wiki?curid=621603>
- Ouzzani, M., Hammady, H., Fedorowicz, Z. i Elmagarmid, A. (2016). Rayyan—A web and mobile app for systematic reviews. *Systematic Reviews*, 5(1), 1–10. <https://doi.org/10.1186/s13643-016-0384-4>
- Papert, S. i Harel, I. (1991). Situating constructionism. U S. Papert i I. Harel (ur.), *Constructionism* (str. 1–12). Ablex Publishing Corporation.
- Parmaxi, A. i Zaphiris, P. (2014). The evolvment of constructionism: An overview of the literature. U P. Zaphiris i A. Ioannou (ur.), *Learning and collaboration technologies. Designing and developing novel learning experiences* (str. 452–461). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-07482-5_43
- Pastuović, N. (1999.). *Edukologija: Integrativna znanost o sustavu cjeloživotnog obrazovanja i odgoja*. Znamen.
- Pastuović, N. (2008). Cjeloživotno učenje i promjene u školovanju. *Odgovne znanosti*, 10(2), 253–267. <http://hrcak.srce.hr/29568>

- Patton, M. Q. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Sage Publications.
- Pavleković, M. (2009). *Matematika i nadareni učenici – Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*. Element.
- Peko, A., Sablić, M. i Livazović, G. (2006). Suradničko učenje u mlađoj školskoj dobi. *Život i škola*, 52(1–2), 17–27. <https://hrcak.srce.hr/25024>
- Pellegrini, M., Lake, C., Neitzel, A. i Slavin, R. E. (2021). Effective Programs in Elementary Mathematics: A Meta-Analysis. *AERA Open*, 7, 1–29. <https://doi.org/10.1177/2332858420986211>
- Penca Palčić, M. (2008). Utjecaj provjeravanja i ocjenjivanja znanja na učenje. *Život i škola*, 54(19), 137–148. <https://hrcak.srce.hr/24076>
- Perić, A. (2009). *Montessori iz prve ruke*. Matematika i škola, 11 (55), 12–20.
- Petticrew, M. i Roberts, H. (2006). *Systematic reviews in the social sciences: A practical guide*. Wiley-Blackwell.
- Phillips, V. J. (1999). *The effects of a math recovery program: A comparative study*. [Doctoral dissertation, Clemson University]. Clemson Libraries. https://tigerprints.clemson.edu/arv_dissertations/273/
- Phillips, V. J., Leonard, W. H., Horton, R. M., Wright, R. J. i Stafford, A. K. (2003). Can Math Recovery save children before they fail? *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 107–111. <https://doi.org/10.5951/TCM.10.2.0107>
- Philipps, S. (1999). *Montessori priprema za život: odgoj neovisnosti i odgovornosti*. Jastrebarsko: Naklada Slap.
- Piaget, J. (1964). Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, 2(3), 176–186. <https://doi.org/10.1002/tea.3660020306>
- Piper, B., Ralaingita, W., Akach, L. i King, S. (2016). Improving procedural and conceptual mathematics outcomes: Evidence from a randomised controlled trial in Kenya. *Journal of Development Effectiveness*, 8(3), 404–422. <https://doi.org/10.1080/19439342.2016.1149502>
- Podolskiy, A. I. (2012). Zone of Proximal Development. U N. M. Seel (ur.), *Encyclopedia of the sciences of learning* (str. 3485–3487). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1428-6_316

- Polya, G., (1956). *Kako riješiti matematički zadatak*. Školska knjiga.
- Posamentier, A. S. i Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6: Powerful strategies to deepen understanding*. Corwin.
- Post, T. (1988). Some notes on the nature of mathematics learning. U T. Post (ur.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods* (str. 1–19). Allyn & Bacon.
- Powell, S. R. i Fuchs, L. S. (2012). Early numerical competencies and students with mathematics difficulty. *Focus on exceptional children*, 44(5), 1–16. <https://doi.org/10.17161/foec.v44i5.6686>
- Pritchard, A. (2009). *Ways of learning: Learning theories and learning styles in the classroom* (2nd ed.). Routledge.
- Purington, K. (2017). *The effectiveness of Montessori materials in multiplication understanding as evidenced by teacher made assessments*. [Master's thesis, University Wisconsin]. MINDS@UW. <http://digital.library.wisc.edu/1793/77273>
- Rajić, V. (2008). Stavovi učitelja i roditelja o razvoju privatnog i alternativnog osnovnog školstva u Republici Hrvatskoj. *Odgovorne znanosti*, 10(2 (16)), 329–347.
- Rajić, V. (2012). Samoaktualizacija, optimalna iskustva i reformske pedagogije. *Napredak*, 153(2), 235–247. <https://hrcak.srce.hr/82873>
- Ramani, G. B. i Eason, S. H. (2015). It all adds up: Learning early math through play and games. *Phi Delta Kappan*, 96(8), 27–32. <https://doi.org/10.1177/0031721715583959>
- Ravitz, J., Hixson, N., English, M. i Mergendoller, J. (2012, 16. travanj). *Using Project-Based Learning to Teach 21st Century Skills: Findings from a statewide initiative* [conferecne paper]. Annual Meetings of the American Educational Research Association. Vancouver, BC. https://www.academia.edu/1854322/Using_project_based_learning_to_teach_21st_century_skills_Findings_from_a_statewide_initiative
- Reić-Ercegovac I. i Jukić T. (2008). Suradničko učenje u razrednoj nastavi. *Život i škola*, 56(2), 69–80. <https://hrcak.srce.hr/file/57969>
- Retnowati, E., Ayres, P. i Sweller, J. (2017). Can collaborative learning improve the effectiveness of worked examples in learning mathematics? *Journal of Educational Psychology*, 109, 666–679. <https://doi.org/10.1037/edu0000167>

- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. i Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346>
- Rittle-Johnson, B. i Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. U R. C. Kadosh i A. Dowker (ur.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (str. 1118–1134). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Rittle-Johnson, B. i Jordan, N. (2016). Synthesis of IES-funded research on mathematics: 2002–2013. National Center for Education Research, Institute of Education Sciences. <https://ies.ed.gov/ncer/pubs/20162003/pdf/20162003.pdf>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R. i Loehr, A. M. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge: The impact of instructional content within a mathematics lesson. *British Journal of Educational Psychology*, 86(4), 576–591. <https://doi.org/10.1111/bjep.12124>
- Röhrs, H. (1994). Maria Montessori. *Prospects*, 24(1), 169–183. <https://doi.org/10.1007/BF02199014>
- Rutt, S., Easton, C. i Stacey, O. (2014). Catch Up ® Numeracy: Evaluation report and executive summary. Education Endowment Foundation. <https://www.nfer.ac.uk/publications/EFCU01/EFCU01.pdf>
- Sablić, M., Rački, Ž. i Lesandrić, M. (2015). Učiteljska i studentska procjena odabranoga didaktičkog materijala prema pedagogiji Marije Montessori. *Croatian Journal of Education = Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje*, 17 (3), 755–782. doi:10.15516/cje.v17i3.1054
- Sablić, M., Lesandrić, M. i Škugor, A. (2022). Ostvarivanje promjena u primarnom obrazovanju implementacijom Montessori pedagogije. U: Strugar, V. i Rajić, V. (ur.) *Suvremeni pristupi obrazovanju učitelja*. Zagreb, HAZU i Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet, str. 196–234.
- Sahlberg, P. (2012). *Lekcije iz Finske: Što svijet može naučiti iz obrazovne promjene u Finskoj*. Školska knjiga.
- Sarama, J. i Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Scherer, M. (2016). *On formative assessment: Readings from educational leadership (EL Essentials)*. ASCD.

- Schleicher, A. (2016), *Teaching excellence through professional learning and policy reform: Lessons from around the world*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264252059-en>
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B. i Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental psychology*, 47(6), 1525–1538. <https://doi.org/10.1037/a0024997>
- Schulz, W. (1992), Didaktika kao teorija podučavanja. U H. Gudjons, R. Teske i R. Winkel (ur), *Didaktičke teorije* (str. 33–53). Educa.
- Schunk, D. H. (2012). *Learning theories: An educational perspective*. Pearson.
- Sharma, M. C. (2001). *Matematika bez suza: kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike*. Ostvarenje.
- Shellard, E. i Moyer, P. S. (2002). *What principals need to know about teaching math*. National Association of Elementary School Principals.
- Siddaway, A. P., Wood, A. M. i Hedges, L. V. (2019). How to do a systematic review: A Best practice guide for conducting and reporting narrative reviews, meta-analyses, and meta-syntheses. *Annual Review of Psychology*, 70(1), 747–770. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010418-102803>
- Sidney, P., i Alibali, M. (2013). Making Connections in Math: Activating a prior knowledge analogue matters for learning. *Journal of Cognition and Development*, 16(1), 160–185. <https://doi.org/10.1080/15248372.2013.792091>
- Sinay, E. i Nahornick, A. (2016). *Teaching and learning mathematics research series 1: Effective instructional strategies*. Toronto District School Board. <https://www.tdsb.on.ca/Portals/research/docs/reports/Teaching%20and%20Learning%20Math%20Research%20Series%201.pdf>
- Sivakova, D., Kochoska, J., Ristevska, M. i Gramatkovski, B. (2017). ICT – The educational programs in teaching mathematics. *TEM Journal*, 6(3), 469–478, <https://doi.org/10.18421/TEM63-05>
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15. <https://doi.org/10.4324/9780203396391-18>
- Slavin, R. E. (2006). *Educational psychology: Theory and practice*. Pearson; Allyn & Bacon.

- Smiljčić, I., Livaja, I. i Acalin, J. (2017). ICT u obrazovanju. *Zbornik radova Veleučilišta u Šibeniku*, 11(3–4), 157–170. <https://hrcak.srce.hr/file/272311>
- Smith, M. S. i Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Smith, M. K., Jones, F. H. M., Gilbert, S. L. i Wieman, C. E. (2013). The classroom observation protocol for undergraduate STEM (COPUS): A new instrument to characterize university STEM classroom practices. *CBE—Life Sciences Education*, 12(4), 618–627. <https://doi.org/10.1187/cbe.13-08-0154>
- Smith, T. M., Cobb, P., Farran, D. C., Cordray, D. S. i Munter, C. (2013). Evaluating math recovery: Assessing the causal impact of a diagnostic tutoring program on student achievement. *American Educational Research Journal*, 50(2), 397–428. <https://doi.org/10.3102/0002831212469045>
- Spangler, D. A. i Wanko, J. J. (2017). *enhancing classroom practice with research behind principles to actions*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Standing, E. M. (1957). *Maria Montessori: Her life and work*. Hollis & Garter Limited.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. i Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Stein, M. K. i Meikle, E. (2017). The nature and role of goals in and for mathematics instruction. U D. A. Spangler i J. J. Wanko (ur.), *Enhancing classroom practice with research behind Principles to Actions* (str. 1–11). National Council of Teachers of Mathematics.
- Stoll, L. i Fink, D. (2000). *Mijenjajmo naše škole: Kako unaprijediti djelotvornost i kvalitetu škola*. Educa.
- Styers, M. i Baird-Wilkerson, S. (2011). *A final report for the evaluation of Pearson's focus MATH Program*. Magnolia Consulting.
- Sullivan, P. (2011). *Teaching mathematics: Using research-informed strategies*. Australian Council for Educational Research.

- Suurtamm, C., Quigley, B. i Lazarus, J. (2015). *Making space for students to think mathematically*. University of Ottawa. https://www.flippedpl.ca/uploads/2/3/9/6/23960677/ww_spacethinkmath.pdf
- Taylor, H. (2014). How children learn mathematics and the implications for teaching. U H. Taylor i A. Harris (ur.), *Learning and Teaching Mathematics 0–8* (str. 3–19). SAGE Publications, Ltd. <https://doi.org/10.4135/9781526401601>
- Teacher Toolkit. (2017, 11. prosinca). *Teacher toolkit: Turn and talk (Secondary)* [Video] YouTube. <https://youtu.be/F5TmrnojNf4>
- Thirumurthy, V. i Seng, S. (2000). Cultural variations in teaching and learning of mathematics in India and Singapore [Conference paper]. ACEI 2000 Annual Conference, Baltimore, MD, USA. <https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/17648/1/ACEI-2000-VidyaT.pdf>
- Toh, T., L., Kaur, B. i Tay, E. G., (2019). *Mathematics education in Singapore*. Springer.
- Torgerson, C. J., Wiggins, A., Torgerson, D., Ainsworth, H. i Hewitt, C. (2013). Every child counts: Testing policy effectiveness using a randomised controlled trial, designed, conducted and reported to CONSORT standards. *Research In Mathematics Education*, 15(2), 141–153. <https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797746>
- Tot, D. i Klapan, A. (2008). Ciljevi stalnoga stručnog usavršavanja: mišljenja učitelja. *Pedagoški istraživanja*, 5(1), 60–69. <https://hrcak.srce.hr/118249>
- Tot, D. (2010). Učeničke kompetencije i suvremena nastava. *Odgojne znanosti*, 12(1), 65–78. <https://hrcak.srce.hr/59600>
- Tsuei, M. (2012). Using synchronous peer tutoring system to promote elementary students' learning in mathematics. *Computers & Education*, 58(4), 1171–1182. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.11.025>
- Valero, P. (2009). What has power got to do with mathematics education? In P. Ernest, B. Greer, & B. Sriraman (ur.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 237–254). Information Age.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. i Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (10. izd.). Pearson.

- Veldman, M. A., Doolaard, S., Bosker, R. J. i Snijders, T. A. B. (2020). Young children working together. Cooperative learning effects on group work of children in Grade 1 of primary education. *Learning and Instruction*, 67, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101308>
- Vizek Vidović, V. (ur.). (2009) *Planiranje kurikuluma usmjerenog na kompetencije u obrazovanju učitelja i nastavnika: Priručnik za visokoškolske nastavnike*. Filozofski fakultet; Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu. <http://idiprints.knjiznica.idi.hr/297>
- Vlahović Š. V., Vizek Vidović V. i Sudžuka G. (1998). *Kladim se da možeš: Psihološki aspekti početnog poučavanja matematike*. Udruga roditelja Korak po korak.
- Voogt, J., Erstad, O., Dede, C. i Mishra, P. (2013). Challenges to learning and schooling in the digital networked world of the 21st century. *Journal of Computer Assisted Learning*, 29(5), 403–413. <https://doi.org/10.1111/jcal.12029>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Harvard University Press.
- Vygotsky, L. (2012). *Thought and language* (E. Hanfmann, G. Vakar, i A. Kozulin, prijevod). Massachusetts Institute of Technology.
- Watkins, C., Carnell, E. i Lodge, C. (2007). *Effective learning in classrooms*. SAGE.
- Wedell, M. (2009). *Planning for educational change: Putting people and their contexts first*. Continuum.
- Wiggins, G. (2012). 7 keys to effective feedback. *Educational Leadership, ASCD*, 70(1), 10–16. <https://www.ascd.org/el/articles/seven-keys-to-effective-feedback>
- Wong, K., Lee, P., Kaur, B., Foong, P. i Ng, S. (2009). *Mathematics education: The Singapore journey*. World Scientific.
- Worth, J., Sizmur, J., Ager, R. i Styles, B. (2015). *Improving numeracy and literacy*. Education Endowment Foundation. <https://www.nfer.ac.uk/publications/EEOL01/EEOL01.pdf>
- Worthy, J. (2000). Conducting research on topics of student interest. *Reading Teacher*, 54(3), 298–299.
- Wright, R. J. (2008). Mathematics recovery: An early number program focusing on intensive intervention. U A. Dowker (ur.), *Mathematical Difficulties* (str. 203–223). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-012373629-1.50013-7>

Wright, R. J., Martland, J. i Stafford, A. K. (2008). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention*. SAGE.

ŽIVOTOPIS

Sanela Mužar Horvat (djevojačko prezime Mužar) rođena je 13. veljače 1984. godine u Osijeku. Završila je Osnovnu školu Ivana Kukuljevića u Belišću, te Opću gimnaziju u Srednjoj školi u Valpovu. Akademske godine 2007./2008. završila je sveučilišni Učiteljski studij na Učiteljskom studiju Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku te time stekla akademski naziv magistra primarnog obrazovanja (modul A – razvojni smjer). Dobitnica je stipendije Osječko-baranjske županije za studente s ostvarenim zapaženim rezultatima. U rujnu 2008. zapošljava se na mjesto učiteljice razredne nastave u Osnovnoj školi Hinka Juhna Podgorač, područna škola Budimci, na neodređeno radno vrijeme. Akademske godine 2015./2016. upisala je poslijediplomski sveučilišni doktorski studij Pedagogija i kultura suvremene škole za stjecanje akademskog stupnja doktora znanosti na Filozofskom fakultetu Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.

Sudjelovanje na međunarodnim konferencijama tijekom studija:

- 1) Međunarodna znanstvena konferencija *Globalne i lokalne perspektive pedagogije*, Osijek, 27. – 28. listopada 2016., Filozofski fakultet Osijek.
- 2) *6th International Methodological Conference*, Subotica (Serbia), 19–21. listopada 2017., University of Novi Sad, Hungarian Language Teacher training Faculty in Subotica.
- 3) *Carn-Alara, Imagine Tomorrow: Practitioner Learning for the future*, 17–19 October, 2019., Split, Croatia.
- 4) CARNival Conference 2021, Raised Voices UK and International, Online, 2021. Saturday October 2nd – Sunday October 10th, Hosted by the Collaborative Action Research Network.

Popis objavljenih radova tijekom poslijediplomskog studija:

- 1) Mužar Horvat, S. (2016). Kako biti roditelj darovitoj djeci; Tracy Ford Inman; Ed.D; Jane Kirchner; Ph.D. (prikaz). *Školski vjesnik*, 66(1), 135–138.
- 2) Mužar Horvat, S. (2016). Prepoznavanje darovitosti i rad s darovitim učenicima u razrednoj nastavi. *Zbornik stručnih radova s Međunarodne znanstvene konferencije Globalne i lokalne perspektive pedagogije* (str. 159–168). Osijek: Filozofski fakultet Osijek.

- 3) Mužar Horvat, S. (2018). Sociometric status of gifted students in classroom and subject teaching in elementary school. *Metodički obzori*, 13 (1), 57–76. <https://doi.org/10.32728/mo.13.1.2018.03>

PRILOZI

Prilog 1. Suglasnost roditelja

Poštovani roditelji!

U sklopu poslijediplomskog studija Pedagogija i kultura suvremene škole Filozofskog fakulteta Osijek, provest ću akcijsko istraživanje u funkciji unapređenja rezultata učenja učenika osnovne škole iz matematike. Svrha je istraživanja primjena značajki učinkovite nastave matematike koje mogu doprinijeti boljim učeničkim rezultatima iz matematike. Poseban naglasak bit će stavljen na unapređenje kvalitete nastave i učenja učenika. Iz predmeta matematike učenike ću potaknuti na aktivnost, suradnju, kritičko i kreativno mišljenje te korištenje strategija učinkovitog učenja. U matematici namjeravam posebnu pozornost posvetiti značajkama učinkovite nastave matematike. Također namjeravam koristiti različite praktične aktivnosti koje potiču učenike na povezivanje sadržaja matematike sa životnim problemima. U učenju u učionici i kod kuće učenici će se koristiti računalima i mobilnim uređajima (npr. tabletima). Za vrijeme istraživanja, koje ću provesti u prvom polugodištu školske godine 2021./2022., prikupljat ću različite podatke o kvaliteti nastavnog procesa i rezultatima učenja učenika. To uključuje učeničke povratne informacije dobivene na temelju evaluacijskih upitnika i intervjua. Obrazovne rezultate pratit ću uobičajenim provjerama znanja koje se koriste u nastavi. Rezultati učenja učenika bit će dostupni samo meni – učiteljici – koja provodim istraživanje i neće se iznositi javno.

Videozapisi koristit će se za praćenje nastave s ciljem njezina unapređenja, ali isto tako i za prezentaciju ostvarenih promjena u nastavi. Osim toga, videozapisi bit će korišteni kako bi se prezentirali rezultati istraživanja u stručnim i znanstvenim publikacijama.

Pri tome jamčim najvišu razinu etičkih standarda i otvorenosti cijelog procesa u kojemu možete sudjelovati svojim pitanjima i prijedlozima. Kako bih Vam to omogućila, upoznat ću Vas s rezultatima na roditeljskom sastanku koji će se održati nakon istraživanja. Osim toga, za vrijeme istraživanja možete bez objašnjenja pisanim putem zatražiti povlačenje suglasnosti za sudjelovanje Vašeg djeteta u istraživanju. Isto tako, za vrijeme istraživanja i nakon prezentacije rezultata na roditeljskom sastanku, možete pisanim putem zatražiti uvid u prikupljene istraživačke podatke koji se nedvojbeno odnose na Vaše dijete (npr. rezultati ispita, videozapisi nastave i intervjua). To se ne odnosi na anonimne upitnike. Pripremit ću i dati Vam na uvid traženu dokumentaciju. Na Vaš vlastoručno potpisani zahtjev, dijelovi podataka u pisanom obliku koji nisu anonimni i odnose se na Vaše dijete mogu biti obrisani iz arhive, a ako to zatražite, lice Vašeg djeteta na videozapisima i fotografijama može biti zamagljeno tako da ga se ne može prepoznati.

Ukratko, osnovna je svrha istraživanja doprinijeti povećanju postignuća učenika iz matematike te unaprijediti nastavu i kvalitetu učenja učenika za što ste Vi i Vaše dijete, vjerujem, zainteresirani. Zbog toga Vas molim da svojim vlastoručnim potpisom date suglasnost za sudjelovanje Vašeg djeteta u istraživanju.

Unaprijed Vam zahvaljujem!

Učiteljica: Sanela Mužar Horvat

Prilog 2.

ANONIMNA ANKETA ZA UČENIKE IZ MATEMATIKE

Pažljivo počitaj pitanja i zaokruži jedan odgovor:

Matematika mi je zanimljiva.	DA	NE			
Nastava matematike mi je zanimljiva.	DA	NE			
Na nastavi matematike najčešće samostalno rješavamo zadatke iz udžbenika i radne bilježnice.	DA	NE			
Na nastavi matematike često učimo u skupinama.	DA	NE			
Koliko ti se sviđa učenje u skupinama? (zaokruži broj od 1 do 5)	1	2	3	4	5
Učiš li sada matematiku kod kuće više nego prošle školske godine? (zaokruži broj od 1 do 5)	1	2	3	4	5
Procijeni koliko si aktivan/na na nastavi matematike? (zaokruži broj od 1 do 5)	1	2	3	4	5

Odgovori na pitanja punom rečenicom:

1. Što ti se sviđa na nastavi matematike?

2. Što ti se ne sviđa na nastavi matematike?

3. Što predlažeš da se promijeni kako bi nastava matematike bila bolja?

Prilog 3.

UPITNIK ZA RODITELJE NAKON ISTRAŽIVANJA IZ NASTAVE MATEMATIKE:

UPUTA: Svrha je upitnika utvrditi samostalnost, aktivnost i napredovanje Vašeg djeteta nakon istraživanja iz nastave matematike. Upitnik je anonimn, stoga Vas molim da odgovorite iskreno.

1. Procijenite aktivnost Vašeg djeteta u učenju matematike (zaokružite broj od 1 do 5).

Mala 1 2 3 4 5 Velika

2. Smatrate li da je Vaše dijete samostalno?

Malo 1 2 3 4 5 Jako

3. Procijenite je li Vaše dijete motivirano za učenje nastavnih sadržaja iz matematike?

Malo 1 2 3 4 5 Jako

4. Smatrate li da Vaše dijete voli učiti sadržaje iz matematike?

Malo 1 2 3 4 5 Jako

5. Napreduje li Vaše dijete u nastavi matematike?

Malo 1 2 3 4 5 Jako

izv. prof. dr. sc. Ana Mikić Čolić
Kratka 20, HR – Županja
amikic@ffos.hr
091 765 8019

IZJAVA LEKTORA HRVATSKOG JEZIKA
u postupku predaje doktorskog rada na ocjenu

Izjavljujem da je doktorski rad „Ostvarivanje suštinskih promjena u nastavi matematike na temelju rezultata znanstvenih istraživanja“ autorice Sanele Mužar Horvat lektoriran i usklađen s pravilima hrvatskog standardnog jezika.

Potpis lektora

A handwritten signature in blue ink that reads "Ana Mikić Čolić". The signature is written in a cursive style and is positioned to the left of a vertical line that serves as a signature separator.

Osijek, 16. studenoga 2022.